



Univerzitetski centar za primenjenu statistiku

Univerzitet u Novom Sadu



**Bajesova teorema
i uticaj kretanja kursa evra na indeks Belex 15**

-Master rad -

Mentor:

dr Nataša Krklec Jerinkić

Kandidat:

Mladen Ratković

Novi Sad, 2015.

Univerzitet u Novom Sadu

Univerzitetski centar za primenjenu statistiku

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (dipl., mag., dokt.): VR	Master rad
Ime i prezime autora: AU	Mladen Ratković
Mentor (titula, ime, prezime, zvanje): MN	dr Nataša Krklec Jerinkić
Naslov rada: NR	Bajesova teorema i uticaj kretanja kursa evra na indeks Belex 15
Jezik publikacije: JP	Srpski
Jezik izvoda: JI	srp. / eng.
Zemlja publikovanja: ZP	Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Novi Sad, Vojvodina
Godina GO	2015.
Izdavač IZ	Autorski reprint
Mesto i adresa MA	Trg Dositeja Obradovića 5
Fizički opis rada:	(5 poglavlja / 44 strana / 39 grafikona / 14 bibliografska referenca /12 tabela)

FO	
Naučna oblast:	Statistika
NO	
Naučna disciplina:	Statistika u ekonomskim naukama
ND	
Predmetna odrednica, ključne reči:	Bajesova teorema, matematičko očekivanje, uslovne raspodele, očekivanje, devizni kurs, indeks Belex 15
PO	
UDK	
Čuva se:	
ČU	
Važna napomena:	
VN	
Izvod:	Rad se zasniva na aspektima Bajesove teorije i na njenoj praktičnoj primeni. Istraživanje je pre svega usmereno ka uticaju kretanja odnosa kursa evro/dinar (EMU/RSD) na vrednost referentnog indeksa Beogradske berze (Belex 15), koji oslikava kretanje ukupnog tržišta posmatrajući petnaest najlikvidnijih akcija kompanija koje su listirane na berzi. Cilj istraživanja je da se, primenom Bajesove teoreme, na osnovu kretanja kursa, formira procena kretanja indeksa Belex 15, mogućnost njegovog praćenja i predviđanja.
IZ	
Datum prihvatanja teme od strane NN veća:	
DP	
Datum odbrane:	
DO	
Članovi komisije: (ime i prezime / titula / zvanje / naziv organizacije / status)	1. dr Nataša Krejić (predsednik), 2. dr Dora Seleši,
KO	3. dr Nataša Krklec Jerinkić.

University of Novi Sad

University Center for Applied Statistics

Key word documentation

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	Master thesis
Author: AU	Mladen Ratkovic
Mentor: MN	Dr Nataša Krklec Jerinkić
Title: TI	Bayes theory and the influence of Euro exchange rate on index Belex 15
Language of text: LT	Serbian
Language of abstract: LA	eng. / ser.
Country of publication: CP	Serbia
Locality of publication: LP	Novi Sad, Vojvodina
Publication year: PY	2015
Publisher: PU	Author publication
Publication place: PP	Trg Dositeja Obradovića 5
Physical description: PD	5 chapters / 44 pages / 39 charts / 14 references / 12 tables)
Scientific field:	Applied statistics

SF	
Scientific discipline:	
SD	Statistics in economic science
Subject, Key words:	Bayes Theorem, mathematical expectation, conditional distribution, exchange rate, index Belex 15
SKW	
UC	
Holding data:	
HD	
Note:	
N	
Abstract:	This work is based on Bayesian theory aspects and its practical applicability. The research in this study, was primarily focused on the impact of Euro / US (EMU / RSD) exchange rate movements in a relation to the reference index value on the Belgrade Stock Exchange (Belex15), which reflects the movement of the entire market, by observing the fifteen most liquid shares of the stock market listed companies.
AB	
Accepted on Scientific Board on:	
AS	
Defended:	
DE	
Thesis Defend Board:	1. dr Nataša Krejić (president),
DB	2. dr Dora Seleši,
	3. dr Nataša Krklec Jerinkić.

Apstrakt

Rad se zasniva na aspektima Bajesove teorije i na njenoj praktičnoj primeni. Istraživanje je pre svega usmereno ka uticaju kretanja odnosa kursa evro/dinar (EMU/RSD) na vrednost referentnog indeksa Beogradske berze (Belex 15), koji oslikava kretanje ukupnog tržišta posmatrajući petnaest najlikvidnijih akcija kompanija koje su listirane na berzi. Cilj istraživanja je da se, primenom Bajesove teoreme, na osnovu kretanja kursa, formira procena kretanja indeksa Belex 15, mogućnost njegovog praćenja i predviđanja.

Istraživanjem je osim dobijanja Bajesove ocene vršena i provera verodostojnosti iste, kao i kvalitet i mogućnost predviđanja kretanja indeksa Belex 15.

Za formiranje procena i vrednovanje rezultata koriste se istorijski podaci o kretanju relevantnih vrednosti u periodu od 2005-2015. godine.

Ključne reči: matematičko očekivanje, uslovne raspodele, Bajesova teorema, Belex 15, kurs EUR-a

Abstract

This work is based on Bayesian theory aspects and its practical applicability.

The research in this study, was primarily focused on the impact of Euro / US (EMU / RSD) exchange rate movements in a relation to the reference index value on the Belgrade Stock Exchange (Belex15), which reflects the movement of the entire market, by observing the fifteen most liquid shares of the stock market listed companies.

The aim of the research was to, by applying Bayes Theorem based on exchange rate movements, form a index Belex 15 movement assessment, and the possibility of its monitoring and forecasting.

Research has, other than obtained Bayesian estimates, carried out verification of authenticity of the same, as well as quality control and the ability to predict the movement of the index Belex 15.

For the formation of assessment and the results evaluation, historical data on the movement of the relevant values in the period from 2005 to 2015. year were used.

Keywords: mathematical expectation, conditional distribution, Bayes theorem, Belex15, EUR exchange rate.

Sadržaj

1. UVOD	4
1.1. Osnovni pojmovi teorije verovatnoće	4
1.2. Očekivanje slučajne promenjive	6
1.3. Uslovno očekivanje	6
1.4. Marginalne raspodele	7
2. BAJESOVA FORMULA (TEOREMA)	8
3. DEVIZNO TRŽIŠTE I INDEKS BELEX 15	9
3.1 Uslovi i način rada deviznog tržišta	9
3.2 Formiranje kurseva i objavljivanje kursnih lista	9
3.3 Indeks najlikvidnijih akcija BELEX 15	10
3.4 Formula Indeksa Belex 15	11
3.5 Istorijski podaci	13
3.6 Deskriptivna statistika i normalizacija podataka	19
4. PREDVIĐANJE VREDNOSTI INDEKSA BELEX 15	27
4.1 Predviđanje na populaciji	27
4.2 Predviđanje indeksa Belex 15 – finija diskretizacija zavisnih varijabli	30
4.3 Testiranje predviđanja na slučajnom uzorku	33
4.4 Testiranje predviđanja na namernom uzorku	39
4.5 Predviđanje metodom adaptivnog odlučivanja	42
5. ZAKLJUČAK	47
Literatura	48

1. Uvod

Ovaj rad je usmeren ka istraživanju u oblasti finansijskih, odnosno deviznih tržišta. Upotrebom Bajesove teoreme, matematičkog očekivanja, uslovne raspodele želimo da utvrdimo osnovne karakteristike testiranih varijabli, njihovu moguću međuzavisnost i mogućnost predikcije. Imajući u vidu postojanje adekvatnih baza podataka želeli smo proveriti da li i u kojoj meri pomeranja na deviznom tržištu utiču na tržište akcija u Srbiji. Uzeli smo evro kao najznačajniji segment deviznog tržišta, dok je za predstavnika finansijskog tržišta kapitala uzet berzanski indeks Belex 15. Ova dva činioca su se nametnula kao najznačajniji. Pre svega evro jer najveći deo trgovinske razmene, štednje, dugoročnih finansijskih plasmana je vezano za tu valutu. Belex 15 sa druge strane sadrži vrednosti 15 najlikvidnijih (onih kojima se najviše i najčešće trguje) akcija na Beogradskoj berzi i samim tim predstavlja najrelevantniji pokazatelj stanja na tom segmentu finansijskih tržišta. Pored Bajesove ocene za predviđanje koristimo i Laplasovu ocenu (relativnu učestalost). Poređenjem ove dve ocene (pristupa) želimo da proverimo koja daje bolje rezultate (tj. manje odstupanje od stvarne vrednosti). Bitno je napomenuti da u radu koristimo uslovne raspodele formirane na osnovu 60-to dnevnih proseka vrednosti zavisnih varijabli.

Radovi na temu upotrebe Bajesove teoreme na finansijskim tržištima postoje u inostranim izvorima Defusco, Meklivij, Pinto, Rankl [7] proučavaju u poglavlju 4. opšte principe teorije verovatnoće, uslovnu verovatnoću i Bajesovu teoremu tj. mogućnost upotrebe iste u predviđanju očekivane vrednosti akcija jedne kompanije u odnosu na drugu, odnosno portfolija više njih. U nekoliko konkretnih primera autori obrađuju problematiku naknadne posteriorne verovatnoće i uticaj promene izgleda na konačan rezultat (jedan od primera se bavi uticajem pozitivnih vesti o kompaniji na očekivanu zaradu po akciji – EPS). Bek, Niendorf, Peterson [13] izučavaju u svom radu prednosti i mane upotrebe Bajesove teoreme u finansijama, kao i polje najčešće upotrebe. Govore o prednosti koje kvalitetne baze podataka i duge vremenske serije daju u pogledu brzog formiranja kvalitetnih rezultata na osnovu uzoraka kreiranih iz tih baza. Dolaze do zaključka da se u periodu od 1968-2004 Bajesova teorema najviše koristila u člancima vezanim za proučavanje efikasnosti finansijskih tržišta, vrednovanje imovine, analizu tržišnih prinosa i dr. Takođe autori napominju da je Bajesova metoda izuzetno dobra za reviziju krivih uverenja i kao relativno jednostavna primamljiva za upotrebu kod investitora i finansijskih analitičara. Turnovski [14] bavi se upotrebom Bajesove teoreme u očekivanju i njenom upotrebom na deviznom tržištu.

Međutim u Srbiji objavljeni radovi u oblasti Bajesove teoreme se pre svega tiču opšteg konteksta (statistike i matematike), retka je upotreba u određenoj naučnoj oblasti (medicini, poljoprivredi i dr.), ali u finansijama, odnosno finansijskim tržištima takvih radova nema. Pretpostaviti je da postoji više razloga za ovaj izostanak, među kojima su svakako najvažniji nepostojanje finansijskog tržišta (berze) dug vremenski period, a samim tim nepostojanje i kvalitetne u dovoljno kontinuirane vremenske serija (baze podataka) na kojoj bi se ovakva istraživanja vršila.

Kako bi mogli započeti istraživanje prvo ćemo navesti osnovne pojmove teorije verovatnoće.

1.1 Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

Osnovni model u teoriji verovatnoće jeste eksperiment kod koga ostvarivanje određenih uslova ne dovodi do jednoznačnog rezultata. Skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta označavamo sa Ω . Elemente skupa Ω nazivamo elementarnim događajima i označavamo ih sa ω .

Neka je Ω skup elementarnih događaja i F σ -polje nad Ω . Funkcija $P: F \rightarrow [0,1]$ se zove verovatnoća na prostoru (Ω, F) ako zadovoljava uslove

1. $P(\Omega)=1$,
2. $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq F, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots,$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka (Ω, F, P) , gde je Ω skup svih elementarnih događaja, F je σ - polje nad Ω , P verovatnoća na (Ω, F) .

U mnogim slučajevima funkcija verovatnoće se definiše kao preslikavanje $P: F \rightarrow R$ koje pored dva uslova navedena u aksiomima verovatnoće zadovoljava i dodatni uslov za sve događaje $A \in F, P(A) \geq 0$. U tom slučaju se pokazuje da je verovatnoća proizvoljnog događaja $A \in F$, takva da je $0 \leq P(A) \leq 1$.

Skup svih elementarnih događaja Ω je siguran događaj, a prazan skup $\emptyset$ je nemoguć događaj.

Ukoliko je događaj A takav da $A \neq \Omega$ i $P(A)=1$ onda za A kažemo da je skoro siguran događaj, koji ima verovatnoću realizacije 1, ali se ne mora desiti. Ukoliko $A = \emptyset$ i $P(A)=0$ onda za A kažemo da je skoro nemoguć događaj, koji ima verovatnoću realizacije 0, ali se ipak može desiti.

Imajući u vidu da ćemo raditi na realnim (stvarnim) podacima navešćemo i alternativne definicije verovatnoće.

Klasična definicija verovatnoće predstavlja specijalni slučaj aksiomske definicije. Ovakav pristup ima ograničenje jer pretpostavlja da se skup Ω svih elementarnih događaja sastoji od konačno mnogo elementarnih događaja, recimo njih n , pri čemu svi imaju podjednaku šansu realizacije.

Verovatnoća događaja A se u tom slučaju definiše sa

$$P(A) = \frac{k}{n} \text{ gde je } k \text{ broj elementarnih događaja sadržanih u } A$$

Prilikom posmatranje masovnih pojava primećeno je da se pojedini događaji realizuju sa relativno stabilnom frekvencijom.

Pretpostavimo da n puta ponavljamo eksperiment. Neka je pri tome m broj realizacija događaja A . Broj $\frac{m}{n}$ se naziva relativna učestalost (frekvencija) događaja A . Kada se n povećava, broj $\frac{m}{n}$ se stabilizuje oko broja koji predstavlja verovatnoću događaja A .

Nezavisne događaje možemo posmatrati na sledeći način: događaj A ne zavisi od događaja B ako realizacija događaja B ne utiče na verovatnoću realizacije događaja A , odnosno ako

$$P(A|B) = P(A)$$

Događaji A i B su nezavisni ako važi

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Neka je (Ω, F, P) prostor verovatnoća i neka su $A, B \in F$ dva događaja, pri čemu je $P(B) > 0$. Pretpostavimo da realizacija događaja B može uticati na verovatnoću događaja A. Tada govorimo o uslovnoj verovatnoći.

Verovatnoća događaja A pod uslovima koji dovode do realizacije događaja B data je sa $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ukoliko je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sistem događaja, tj. ako su međusobno disjunktne u parovima i ako je njihova unija siguran događaj se verovatnoća događaja A može izračunati pomoću takozvane formule totalne verovatnoće

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i), \text{ za svako } A \in F$$

1.2 Očekivanje slučajne promenljive

Neka je X prosta slučajna promenljiva koja uzima vrednosti $x_1, \dots, x_n$. Tada je njeno očekivanje dato sa

$$E(X) := \sum_{k=1}^n x_k p(x_k) \text{ gde je}$$

$$p(x_k) = P(X = x_k)$$

Očekivanje proste slučajne promenljive je uvek konačan broj.

Očekivanje $E(X)$ diskretne slučajne promenljive X sa raspodelom $p(x_k), k = 1, 2, \dots$, je

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k), \text{ i postoji ako i samo ako}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty$$

U daljem radu posmatraćemo samo dvodimenzionalne slučajne promenljive diskretnog tipa, pa ćemo se fokusirati na definicije i osobine dvodimenzionalnog slučaja. Neka je (X, Y) slučajan vektor pri čemu su X i Y slučajne promenljive koje mogu uzeti vrednosti $x_1, x_2, \dots$ i $y_1, y_2, \dots$

Raspodela slučajnog vektora je data sa $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$

1.3 Uslovno očekivanje

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna diskretna slučajna promenjiva sa raspodelom

$$p(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots$$

Uslovno očekivanje za slučajnu promenjivu X pri uslovu $\{Y = y_j\}$ se definiše kao očekivanje za X u odnosu na uslovnu raspodelu

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}, \text{ gde je } q(y_j) = P(Y = y_j)$$

Uslovno očekivanje za slučajnu promenjivu X pri uslovu $\{Y = y_j\}$ je

$$E(X | Y = y_j) = \sum_i x_i p(x_i | y_j) = \frac{1}{q(y_j)} \sum_i x_i p(x_i, y_j)$$

1.4 Marginalne raspodele

Marginalne raspodele slučajnih promenljivih X i Y se iz zajednicke odredjuju na sledeci nacin:

$$P(X = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j), i = 1, 2, \dots$$

$$P(Y = y_j) = \sum_i p(x_i, y_j), j = 1, 2, \dots$$

2. BAJESOVA FORMULA (TEOREMA)

Bajesova teorema je dobila ime po engleskom statističaru, svešteniku i filozofu Tomasu Bajesu (1701-1761), koji je prvi pokazao kako koristiti nove dokaze za ažuriranje uverenja. Bajesov neobjavljeni rukopis je značajno izmenio Ričard Prajs i predstavio ga Kraljevskom društvu. Prajs je posthumno objavio Bajesovo delo u obliku eseja pod nazivom Esej ka rešenju problema u doktrini šansi 1763. godine (*An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*) u časopisu Filozofske transakcije (*Philosophical Transactions*) koji je sadržao Bajesovu teoremu i osnove teorije verovatnoće (Bolstad [2]).

Pjer Simon Laplas je dalje razvio Bajesovu teoremu i objavio istu 1812. godine u svom delu Analitička teorija verovatnoće (*Théorie analytique des probabilités*). Sir Herold Džefri je postavio bazu aksioma Bajesove i Laplasove teorije i pri tome konstatovao „da je Bajesova teorema za verovatnoću isto što je Pitagorina teorema za geometriju“

Ukoliko je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sistem događaja, Bajesova formula je oblika

$$P(H_m | A) = \frac{P(H_m) \cdot P(A | H_m)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)}, \quad m=1, \dots, n, A \in F, P(A) > 0$$

Postoji više interpretacija Bajesove teoreme, a navešćemo najznačajnije.

Prosto objašnjenje glasi da nam Bajesova teorema daje odgovor na pitanje, ukoliko se glavni događaj desio, koja je verovatnoca da mu je prethodila neka od hipoteza?

Bajesova teorema je način da se revidiraju postojeće prognoze na osnovu novih, dodatnih dokaza.

Ovo najpoznatiji oblik Bajesovog pristupa, ali da ćemo ga mi koristiti u širem smislu - kao revidiranje verovatnoća na osnovu neposrednih događaja koji prethode događaju od interesa.

Bajesovu teoremu ćemo najlakše razumeti kao način za reviziju prethodnih uverenja koja smo dobili na bazi prethodno poznatih dokaza, odnosno Bajesova teorema nas dovodi do toga da je naknadno (aposteriornom) uverenje ekvivalentno prethodnom (apriornom) uverenju o nekom događaju ponderisano verovatnoćom istog.

Prvo je Danijel Bernuli, a zatim u 20. veku Džon Nojman, pokušao da uključi koncept verovatnoće u problem donošenja odluke. Po njima, pošto ljudsko znanje nije savršeno, svaka odluka se donosi sa određenom nesigurnošću. Matematički posmatrano, teorija verovatnoće ostaje ista, ali se može menjati značaj koji donosilac odluke dodeljuje pojedinim rezultatima odluke.

Apriorna verovatnoća se odnosi na značaj koji se dodeljuje pojedinim ishodima pre eksperimenta, u uslovima kada podaci nisu poznati. Apriornu verovatnoću dodeljuje svaki donosilac odluke ponaosob, što predstavlja slabost koncepta. Ipak, prednost mu je što omogućava davanje iskaza o pojavama pre njihovog direktnog posmatranja.

Kombinujući apriornu verovatnoće sa uslovnom raspodelom rezultata eksperimenta, koristeći se Bajesovom teoremom, dobijaju se aposteriorne verovatnoće.

Koncepti apriorne i aposteriorne verovatnoće su značajni jer je na njima bazirano zaključivanje o populaciji na osnovu uzroka.

3. DEVIZNO TRŽIŠTE I INDEKS BELEX 15

Predmet ovog rada jeste teorija verovatnoće, Bajesova teorema i uticaj kretanja kursa evra, odnosno dinara na indeks Belex 15. Istraživanje je sprovedeno na osnovu javno dostupnih, zvaničnih podataka Narodne Banke Srbije i Beogradske berze ad Beograd. Serija podataka sadrži vrednosti od 04.10.2005. do 20.04.2015. godine. Vrednosti koje su uzete kao referentne su srednja vrednost dinara (RSD) u odnosu na evro (EMU) i zaključena dnevna vrednost indeksa Belex 15 na zatvaranju trgovačkog dana.

3.1. Uslovi i način rada deviznog tržišta

Na deviznom tržištu mogu se kupovati i prodavati devize i efektivni strani novac u skladu sa uslovima koje propisuje nadležni regulatorni organ. U Republici Srbiji taj organ je Narodna banka Srbije i ona utvrđuje vrste deviza i efektivnog stranog novca koji se kupuju i prodaju na deviznom tržištu.

Na deviznom tržištu obavlja se spot, terminska i svop kupovina i prodaja deviza, kao i kupovina i prodaja deviza s datumom izvršenja kraćim od spot valute.

Spot kupovina i prodaja deviza jeste kupovina i prodaja deviza za dinare s datumom izvršenja dva radna dana od dana zaključenja kupoprodajnog ugovora, odnosno dana trgovanja (spot valuta).

Terminska kupovina i prodaja deviza jeste kupovina i prodaja deviza za dinare s datumom izvršenja na određeni dan posle spot valute.

Međubankarsko devizno tržište (MDT) jeste deo deviznog tržišta, na kome se obavljaju poslovi kupovine i prodaje deviza i efektivnog stranog novca između Narodne banke Srbije i banaka, odnosno između banaka.

Ugovor o kupovini ili prodaji deviza i efektivnog stranog novca na MDT-u se, po pravilu, smatra zaključenim u trenutku kad ponudilac primi prihvatanje ponude, a na sastanku MDT-a smatra se zaključenim u trenutku formiranja kursa.

Imajući u vidu da se ovaj vid trgovine obavlja isključivo elektronskim putem, nakon zaključenja ugovora o kupovini ili prodaji deviza na MDT-u u kome je Narodna banka Srbije jedna od ugovornih strana – ugovorne strane su dužne da međusobno razmene SWIFT poruke.

3.2 Formiranje kurseva i objavljivanje kursnih lista

Banke i Narodna banka Srbije kupuju i prodaju devize na MDT-u po kursevima koje slobodno formiraju (kotiraju) na osnovu ponude i tražnje.

Na sastanku MDT-a obavlja se kupovina i prodaja evra po formiranom kursu u trenutku zatvaranja tog sastanka.

Banka jednom dnevno, na početku svakog svog radnog dana, slobodno formira i objavljuje svoju kursnu listu za devize i kursnu listu za efektivni strani novac.

Formirana kursna lista banke važi do objavljivanja njene naredne kursne liste.

Narodna banka Srbije svakog svog radnog dana utvrđuje zvanični srednji kurs dinara prema evru – na osnovu podataka o zaključenoj spot prodaji deviza (evra) i zaključenoj prodaji deviza (evra).

Kursom dinara prema evru smatra se protivvrednost jedinice strane valute – evra u dinarima. Narodna banka Srbije objavljuje podatak o zvaničnom srednjem kursu dinara prema evru na svojoj Internet prezentaciji, po pravilu do 18.00 časova svakog radnog dana, a koji se primenjuje od 8.00 časova narednog radnog dana (Narodna banka Srbije [8]).

3.3 Indeks najlikvidnijih akcija BELEX 15

Ovaj indeks predstavlja vodeći indeks Beogradske berze sa ciljem da u što preciznijoj meri opiše kretanja cena najlikvidnijih akcija na tržištu Beogradske berze.

Belex15 je indeks ponderisan tržišnom kapitalizacijom akcija koje se nalazi u slobodnom prometu (free float), i neprilagođen je za isplaćene dividende. Namenjen je da bude analitički alat kako za portfolio menadžere, profesionalne analitičare, stručnu javnost, investitore, tako i sve druge koji proučavaju dinamiku kretanja cena na tržištu.

BELEX 15 se sastoji od akcija kojima se trguje metodom kontinuiranog trgovanja na regulisanom tržištu i koje su ispunile kriterijume za ulazak u indeksnu korpu. Težina komponenti u indeksu je ograničena na maksimalnih 20% u odnosu na ukupnu tržišnu kapitalizaciju indeksa na datum revizije.

Kalkulacija i objavljivanje indeksa Belex15 vrši se svakog radnog dana Berze, u realnom vremenu, od trenutka kada je ispunjen uslov za njegovo izračunavanje i publikovanje, pa do formiranja cena na zatvaranju.

BELEX15 inicijalno je definisan i metodološki obrađen u septembru 2005. godine

Bazni datum: 01.10.2005. godine

Bazna vrednost indeksa: 1000,00 indeksnih poena

Bazna vrednost ponderisane *free-float* tržišne kapitalizacije: 33.087.213.173 dinara (*tržišna kapitalizacija na dan baznog datuma, nakon zatvaranja tržišta*)

Bazna vrednost delioca predstavlja jedan promil bazne vrednosti ponderisane *free-float* kapitalizacije i iznosi 33.087.213,17 dinara.

Prilikom izračunavanja vrednosti indeksa u bilo kojem trenutku relevantna količina akcija određenog izdavaoca koja se koristi prilikom računanja, obuhvata ukupan broj običnih akcija pomnožen *free float* faktorom (FFc) na dan poslednje revizije indeksne korpe.

Free float faktor (FFc) je procenat akcija koji se nalazi u slobodnom prometu i koji je javno dostupan potencijalnim investitorima. FFc se dobija kada se od ukupnog broja akcija određene kompanije oduzmu akcije koje se ne nalaze u slobodnom prometu (non free float). Pod pojmom akcija koje nisu u slobodnom prometu smatraju se akcije koje su u vlasništvu:

- lica koja pojedinačano poseduju više od 5% akcija od ukupno izdatih akcija izdavaoca, izuzimajući akcije koje se nalaze u vlasništvu investicionih i penzionih fondova, društva za upravljanje fondovima, osiguravajućih društava, brokersko dilerskih društava kao i druge akcije na kastodi računima, i akcije u vlasništvu drugih investicionih kompanija sa kratkoročnim investicionim strategijama;
- akcije koje poseduju međunarodne i strane organizacije i institucije za razvoj ukoliko poseduju više od 5% akcija od ukupno izdatih akcija izdavaoca;
- akcije koje poseduje Republika Srbija uključujući i akcije koje poseduju organi, organizacije i ustanove osnovane posebnim zakonima od strane Republike (agencije, fondovi i sl) ukoliko poseduju više od 5% akcija od ukupno izdatih akcija izdavaoca;

FFc se utvrđuje na bazi javno dostupnih informacija sa internet stranica Centralnog registra, kao i podataka koji su objavljeni u prospektu izdavaoca na datum revizije indeksne korpe. FFc se računa kvartalno, primenjuje se od trenutka implemantacije revizije indeksne korpe i važi do sledeće revizije.

U cilju dostizanja najviših mogućih standarda koji se koriste prilikom kreiranja investibilnih

proizvoda, Indeksi komitet je ovlašćen za primenu metodologije. Osim navedenog, Indeksi komitet je ovlašćen da svojim autoritetom i stručnim znanjem unapredi procese same metodologije i izbora hartija koji će se zasnivati na principima iznetim u ovim pravilima. Ovlašćenja Indeksi komiteta usmerena su i na primenu diskrecionih prava u primeni ove metodologije, naročito u slučajevima kada proceni da kvantitativni kriterijumi definisani ovom metodologijom nisu u skladu sa najboljim interesima tržišnih učesnika i same Berze.

Indikativna cena je cena na zatvaranju, postignuta na prethodnom trgovanju predmetnom hartijom od vrednosti.

Cena na otvaranju - cena po kojoj je zaključena prva transakcija predmetnom hartijom od vrednosti. Cena na zatvaranju - predstavlja cenu koja se izračunava na bazi algoritma koji propisuje direktor Berze. Cena na zatvaranju utvrđuje se alternativno, kao:

- cena poslednje transakcije u fazi kontinuiranog trgovanja, ili
- prosečna ponderisana cena specificiranog broja poslednje-trgovanih jedinica svake od hartija od vrednosti, ili
- prosečna ponderisana cena poslednje-trgovanog specificiranog procenta od ukupno trgovanih jedinica svake od hartija od vrednosti, ili
- prosečna ponderisana cena poslednje-trgovanih jedinica svake od hartija od vrednosti u specificiranom vremenskom periodu.

Ukoliko tekućeg trgovačkog dana kada se vrši kalkulacija indeksa, nije bilo trgovanja akcijama određenog izdavaoca, cena akcija na zatvaranju koja se koristi prilikom kalkulacije indeksa je indikativna cena predmetne akcije.

U cilju sprečavanja da akcije određenog izdavaoca imaju dominantno učešće tj. težinu u indeksnoj korpi, vrši se ograničavanje broja akcija sa kojom određeni izdavalac može da učestvuje u indeksnoj korpi.

Ograničavanje težine određenog izdavaoca vrši se preko pondera (A_i) na sledeći način:

- ako je učešće Free float tržišna kapitalizacije pojedine akcije manje ili jednako 20% od ukupne Free float tržišne kapitalizacije onda je ponder jednak 1,
- ako je učešće Free float tržišne kapitalizacije pojedine akcije veće od 20% od ukupne Free float tržišne kapitalizacije onda se ponder prilagođava do momenta kada je učešće svake komponente indeksne korpe manje ili jednako 20%,
- tako dobijen ponder množi broj akcija u free float-u i tako dobijen rezultat predstavlja broj akcija koje će biti uključene u indeksnu korpu,
- nakon postupka ograničavanja težine učešća za izdavaoca čija je inicijalna težina veća od 20%, težine učešća ostalih izdavaoca se uvećavaju, te ukoliko je tada njihova težina učešća veća od 20%, na opisani način vrši se ograničavanje i njihove težine učešća, sve do trenutka dok učešće težine svih izdavalaca nije manje ili jednako 20%,
- broj akcija koje učestvuju u indeksnoj korpi je nepromenljiv do sledeće revizije indeksne korpe.

U cilju sprečavanja da određeni od industrijski sektor ima dominantno učešće tj. težinu u indeksnoj korpi, vrši se ograničavanje broja hartija iz istog industrijskog sektora koje se mogu naći u sastavu indeksne korpe.

U tom smislu, nijedan industrijski sektor ne može biti zastupljen sa više od 50% izdavalaca u sastavu indeksne korpe.

3.4 Formula Indeksa Belex 15

Belex 15 se objavljuje na internet stranici Beogradske berze, na BELEX.info servisu, Tikeru Beogradske berze, kao i u svim izveštajima koje Berza objavljuje.

Belex 15 predstavlja novu indeksnu korpu podeljenu sa starom indeksnom korpom i pomnoženu sa vrednošću delioca u trenutku $t-1$.

$$\text{Belex 15}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n C(i,t)K(i,t)FFcAi}{d(t)}$$

$$d(t) = \frac{\sum_{i=1}^n C(i,t)K(i,t)FFc(t)Ai(t)}{\sum_{i=1}^n C(i,t-1)K(i,t-1)FFc(t-1)Ai(t-1)} d(t-1)$$

gde je:

BELEX15(t) - vrednost indeksa selektovanih hartija u trenutku t, zaokružena na dve decimale;
n - broj izdavalaca čije akcije se nalaze u indeksnoj korpi - selektovane hartije su

nepromenljive od momenta revizije;

i - brojač, koji uzima vrednosti od 1 do 15 i predstavlja određenog izdavaoca čije su akcije u indeksnoj korpi;

$C(i,t)$ – cena akcija izdavaoca i, u trenutku t, koja se uzima u realnom vremenu iz sistema za trgovanje;

$K(i,t)$ – količina akcija izdavaoca i, u trenutku t;

$d(t)$ – vrednost delioca u trenutku t.

$FFc(i,t)$ - free float faktor izdavaoca i, u trenutku t ;

$A(i,t)$ – prilagođavajući faktor izdavaoca i (ponder);

U cilju izbegavanja odstupanja vrednosti indeksa od realnih vrednosti, vrši se prilagođavanje delioca usled promene indeksne korpe, kao i usled promene unutar komponenti indeksne korpe. Prilagođavanje delioca se vrši na taj način, da ukoliko sledećeg radnog dana ne dođe do promene cena akcija koje su uključene u indeksnu korpu, vrednost indeksa ostane ista.

Proces kompozicije indeksa zasniva se na kvantitativnim merama, ali se ne samo i isključivo rukovođeno njima. Proces konačne kompozicije indeksne korpe je u nadležnosti Indeksnog komiteta koji odlučuje o konačnom broju izdavalaca čije su hartije uključene u indeksnu korpu, pitanjima revizije, uključenja i isključenja akcija iz indeksne korpe. Indeksni komitet ima diskreciono pravo da na osnovu ove Metodologije, a procenjujući interes Berze kao proizvođača indeksa, vrši selekciju hartija koje će sačinjavati indeksnu korpu.

Indeksna korpa se sastoji od običnih akcija sa regulisanog tržišta kojima se trguje metodom kontinuiranog trgovanja i koje su ispunile kriterijum za ulazak u indeksnu korpu.

Indeksnu korpu mogu sačinjavati akcije koje su ispunile pravilo 80.

Pravilo 80 obuhvata akcije kojima se trguje na regulisanom tržištu, a koje su tokom prethodna dva kvartala imale minimum 80% trgovanja na kojima su zaključene transakcije.

Nakon formiranja liste akcija koje su ispunile napred navedeni kriterijum vrši se rangiranje prema neponderisanoj free float tržišnoj kapitalizaciji. Prvih 15 akcija na tako formiranoj rang listi čini osnov za indeksnu korpu. Težina komponenti u indeksu je ograničena na maksimalnih 20% u odnosu na ukupnu free float tržišnu kapitalizaciju preko pondera A_i . Ako je učešće free float tržišne kapitalizacije pojedine akcije manje od 20% od ukupne free float tržišne kapitalizacije ponder A_i ima vrednost 1. Ako je učešće free float tržišne kapitalizacije pojedine akcije veće od 20% od ukupne free float tržišne kapitalizacije onda se ponder A_i

prilagođava (umanjuje) do momenta kada je učešće svake komponente indeksne korpe manje ili jednako 20% u odnosu na ukupnu ponderisanu free float tržišnu kapitalizaciju.

Broj izdavalaca čije akcije učestvuju u indeksnoj korpi je konstantan u toku perioda između revizija indeksne korpe. Indeksna korpa može imati najmanje 7, a najviše 15 komponenti u zavisnosti od broja akcija koje su ispunile Pravilo 80 i odluke Indeksnog komiteta.

Odluku o isključenju predmetne akcije iz indeksne korpe donosi Indeksni komitet. Akcije izdavaoca se isključuju iz indeksne korpe u situacijama kada:

- izdavalac prestane da ispunjava uslove predviđene ovom metodologijom,
- izdavalac podnese zahtev za isključenje ili je isključen sa regulisanog tržišta,
- je pokrenut postupak stečaja ili likvidacije izdavaoca.

Revizija indeksne korpe se vrši polugodišnje. Datumi revizije su 15. mart i 15. septembar. Implementacija revizije vrši se po isteku berzanskog sastanka na 31. mart i 30. septembar.

U cilju obezbeđivanja konzistentnosti vrednosti indeksa, vandredne revizije i prilagođavanja se vrše samo u slučajevima značajnih promena karakteristika indeksnih komponenti pri čemu se kod vanrednog prilagođavanja ne vrše prilagođavanja korektivnog faktora (Ai).

Sastav indeksne korpe na datum poslednje revizije 31.12.2014.				
Izdavalac	Simbol	Količina	FFc	Procentat
NIS a.d., Novi Sad	<u>NIIS</u>	163.060.400	13,97%	20,00%
Komercijalna banka a.d. , Beograd	<u>KMBN</u>	16.817.956	23,67%	18,33%
Aerodrom Nikola Tesla a.d. , Beograd	<u>AERO</u>	34.289.350	16,85%	11,39%
AIK banka a.d. , Niš	<u>AIKB</u>	9.045.756	30,30%	10,58%
Imlek a.d. , Beograd	<u>IMLK</u>	8.037.570	12,19%	9,86%
Energoprojekt holding a.d. , Beograd	<u>ENHL</u>	10.931.292	46,06%	9,59%
Galenika Fitofarmacija a.d. , Zemun	<u>FITO</u>	1.320.000	49,94%	4,58%
Sojaprotein a.d. , Bečež	<u>SJPT</u>	14.895.524	20,17%	4,05%
Metalac a.d. , Gornji Milanovac	<u>MTLC</u>	1.020.000	80,55%	3,78%
Alfa plam a.d. , Vranje	<u>ALFA</u>	174.812	35,46%	2,47%
Jedinstvo a.d. , Sevojno	<u>JESV</u>	304.719	64,54%	2,26%
Messer Tehnogas a.d. , Beograd	<u>TGAS</u>	1.036.658	18,06%	2,14%
Goša montaža a.d. , Velika Plana	<u>GMON</u>	257.174	86,50%	0,98%

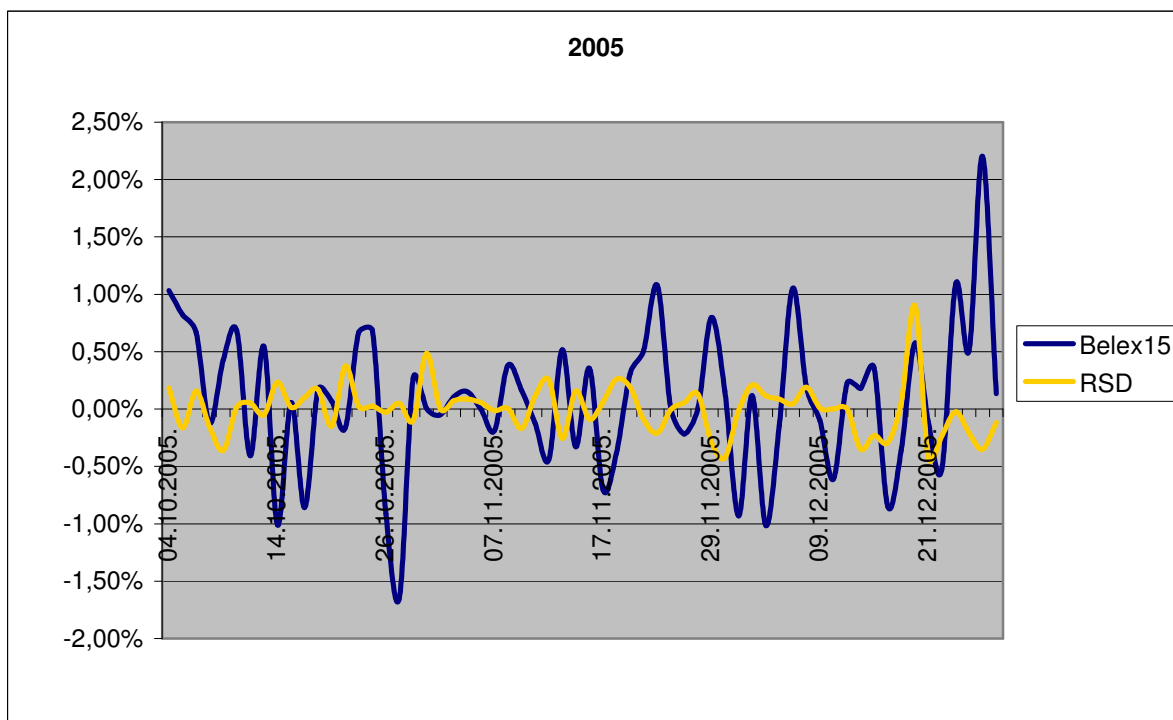
(www.belex.rs [11])

3.5. Istorijski podaci

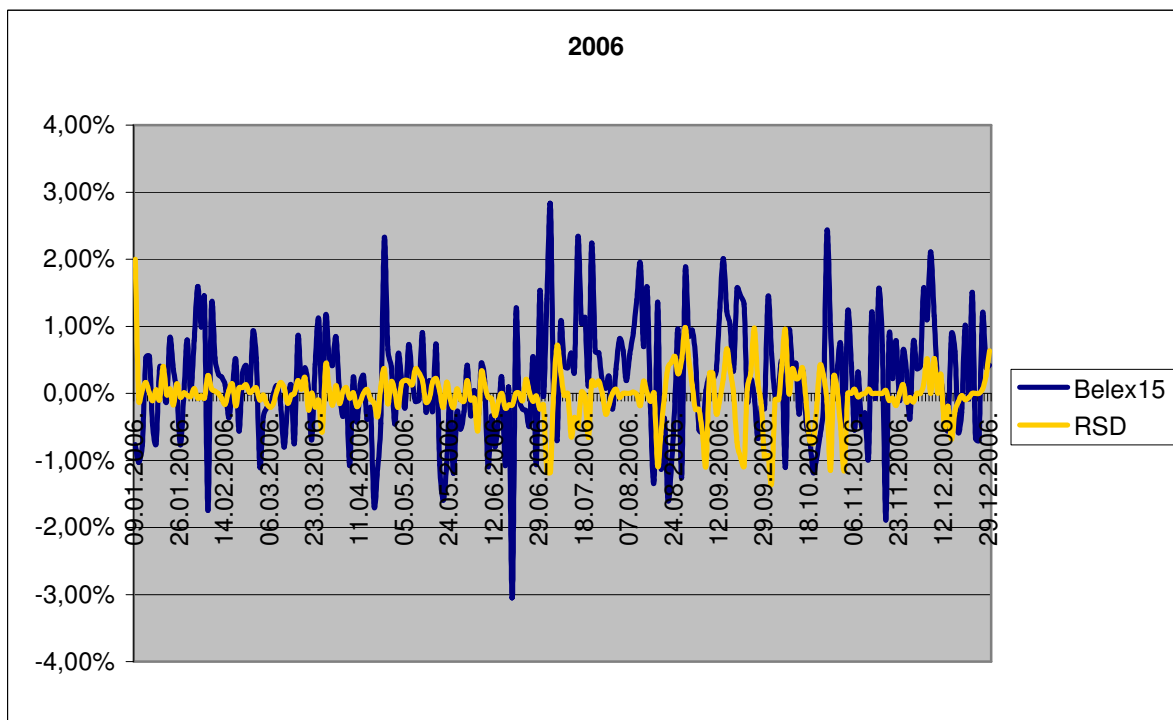
Za proučavanje uticaja promene vrednosti dinara na vrednost indeksa Belex 15 uzeli smo istorijske vrednosti iz javno dostupnih baza podataka za period od 04.10.2005. do 20.04.2015. godine.

Istoriske vrednosti za pomenuti period na dnevnom nivou obuhvataju 2399 posmatranja, odnosno isto toliko radnih dana za koje je utvrđivana vrednost kursa evra prema dinaru i vrednost indeksa Belex 15.

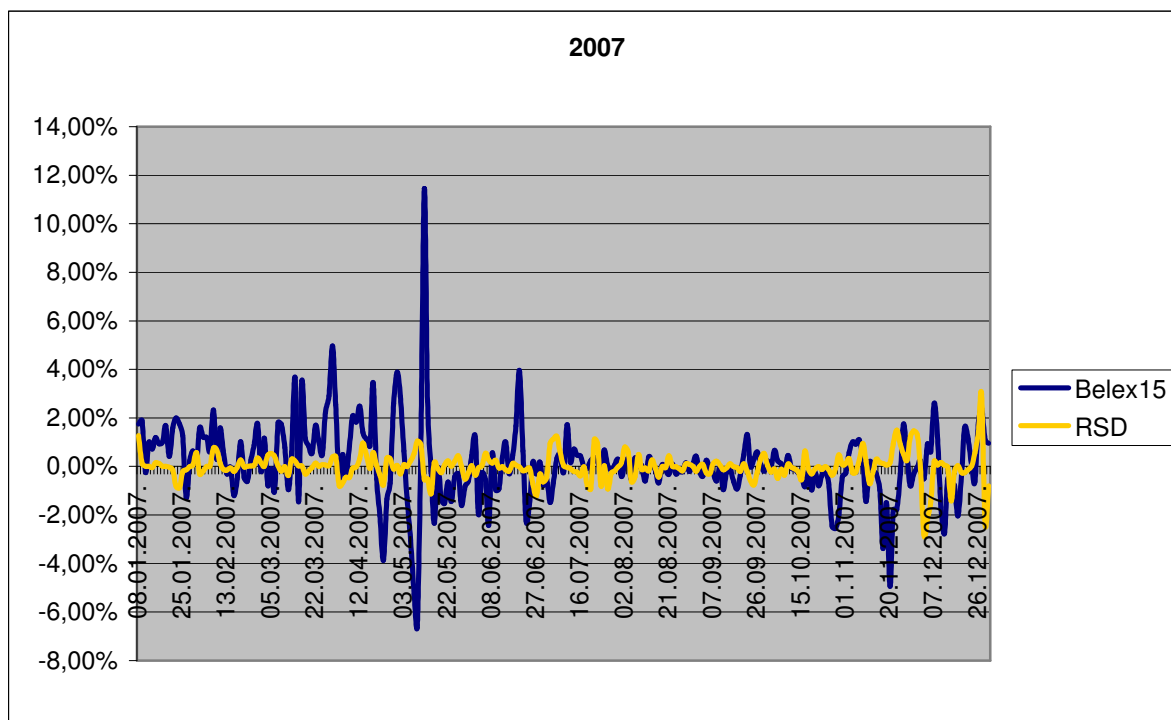
U Grafikonima 1 do 11 su predstavljeni prinosi za Belex 15 i RSD.



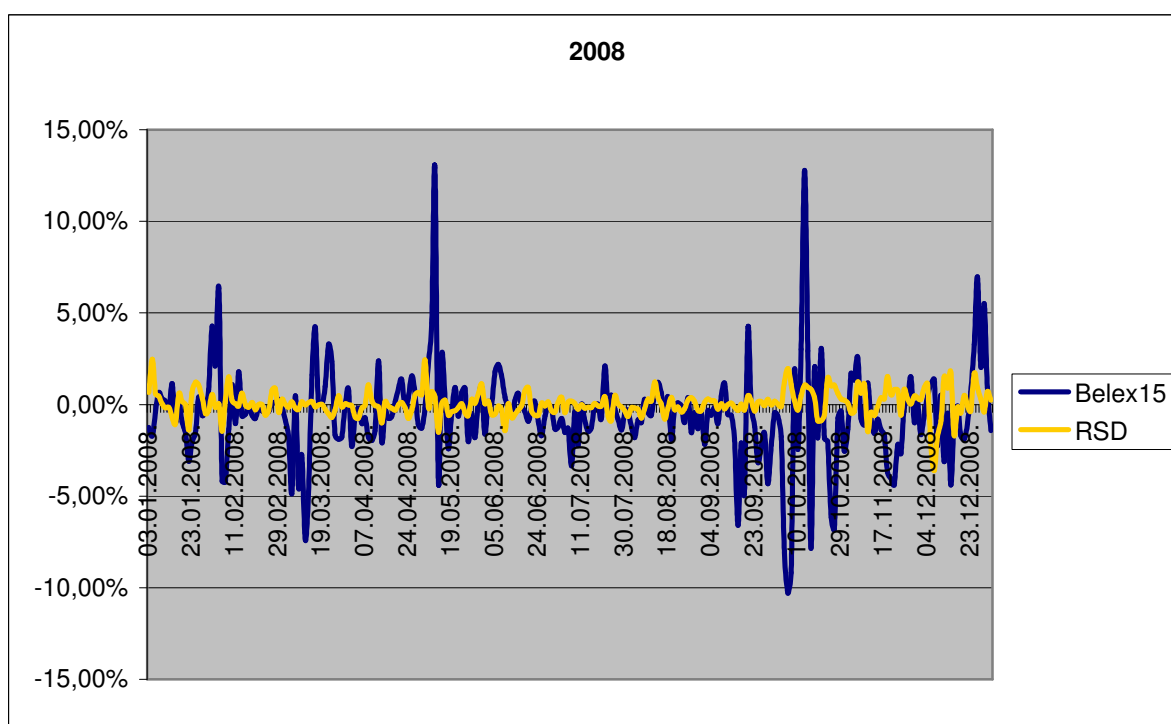
Grafikon 1



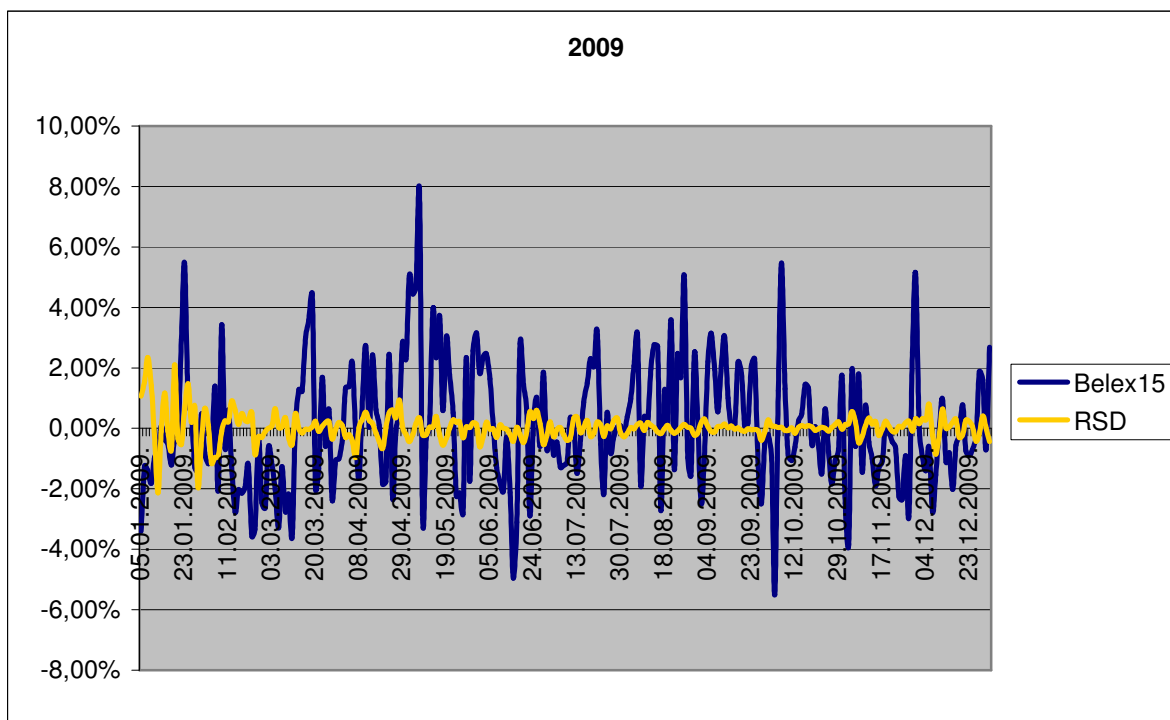
Grafikon 2



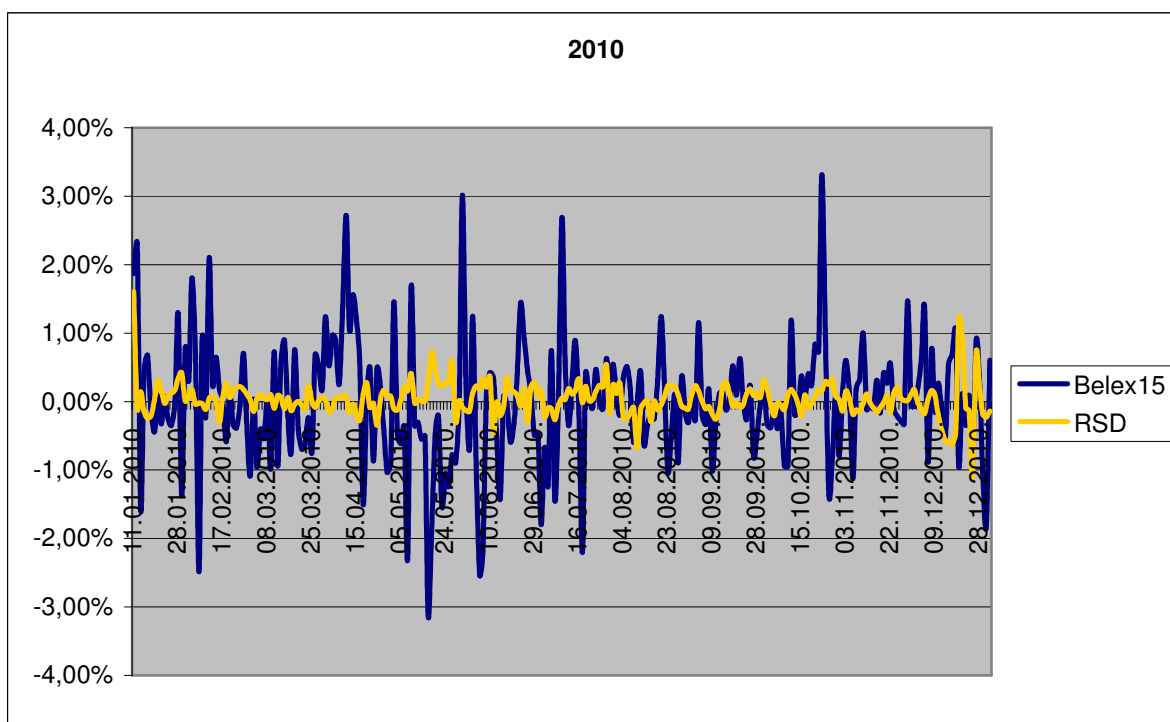
Grafikon 3



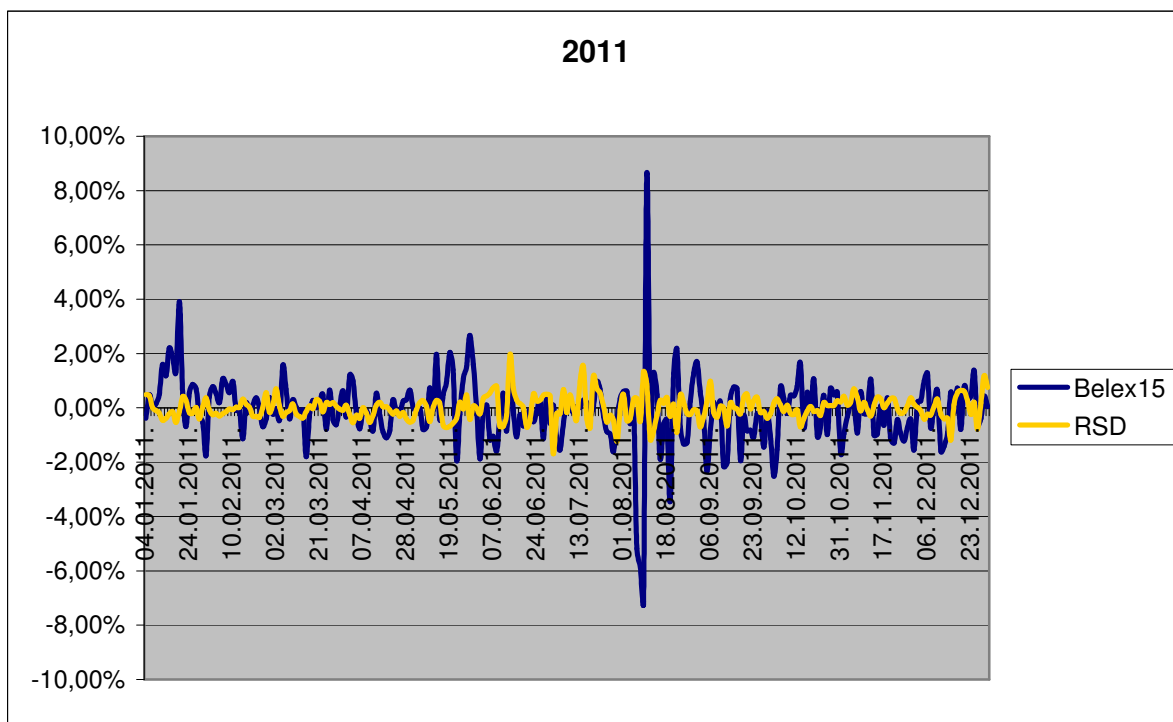
Grafikon 4



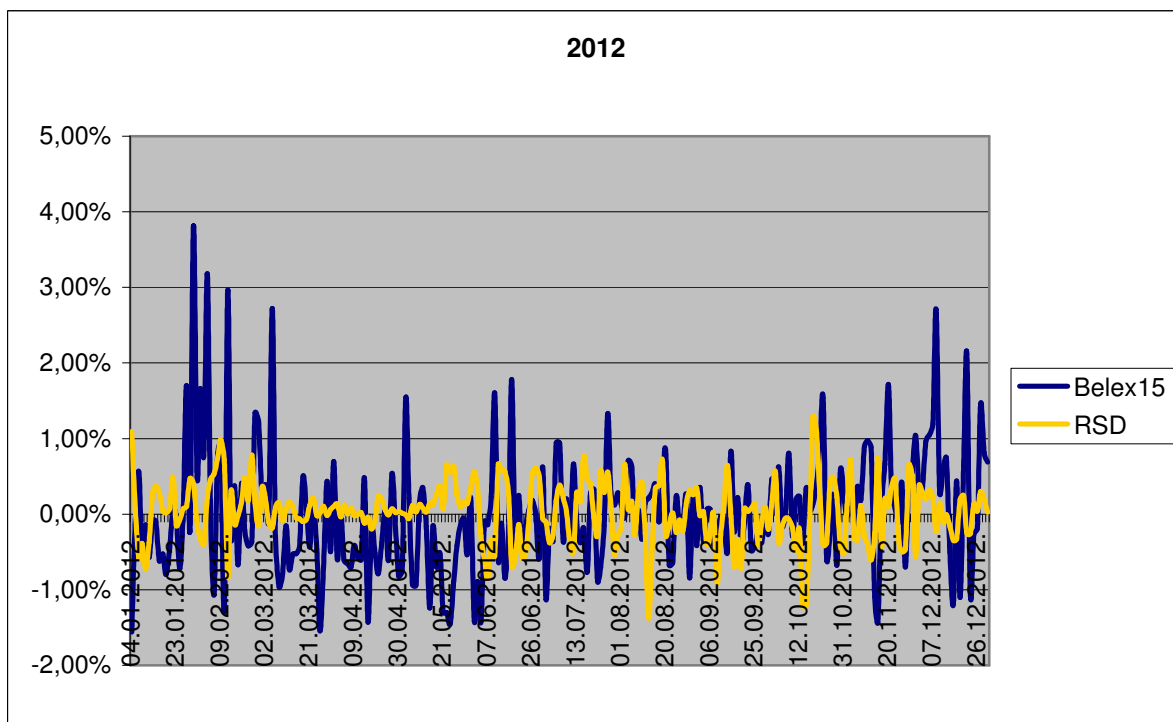
Grafikon 5



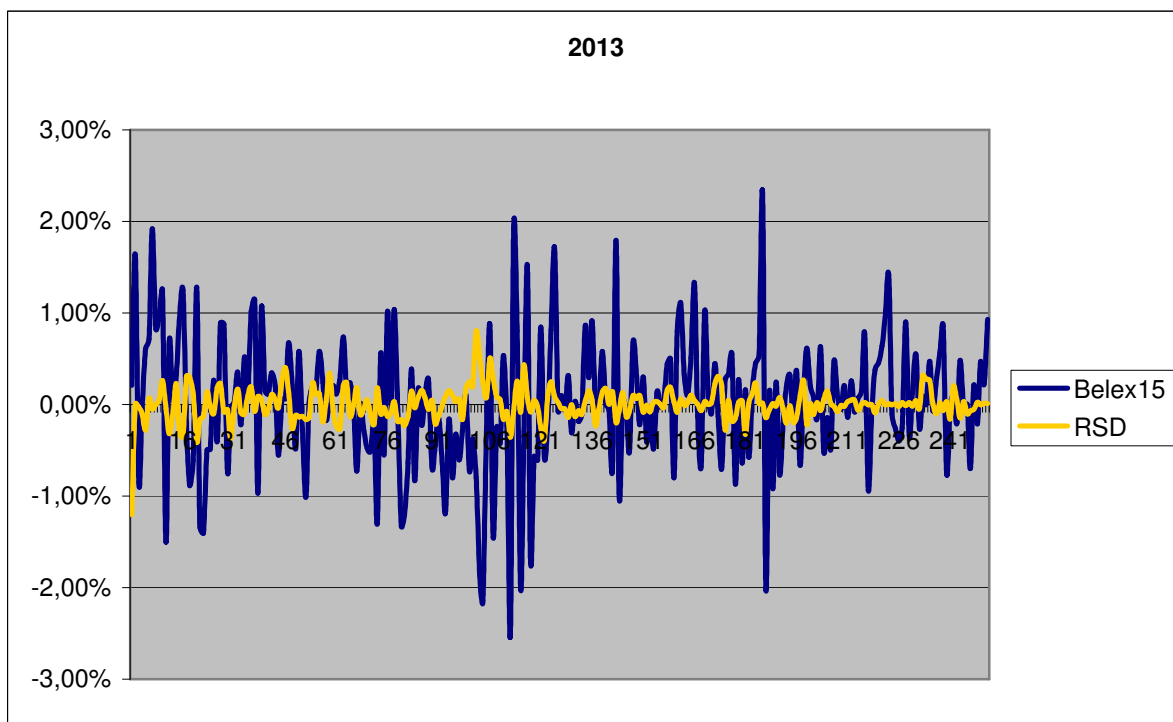
Grafikon 6



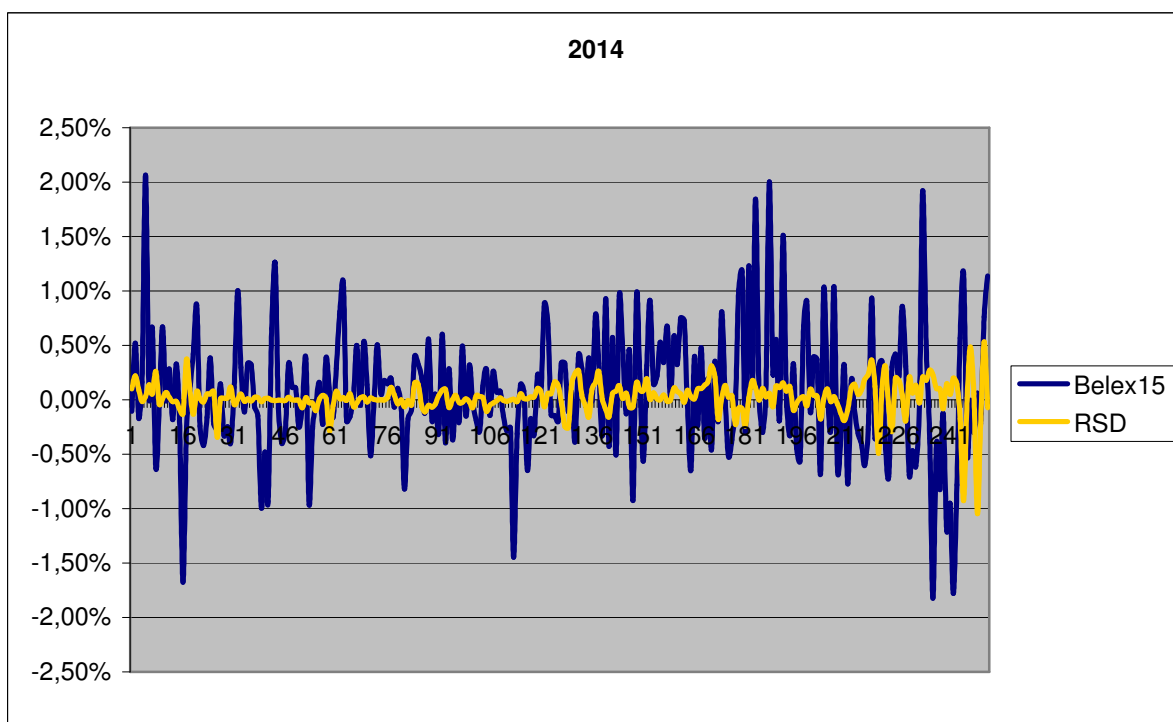
Grafikon 7



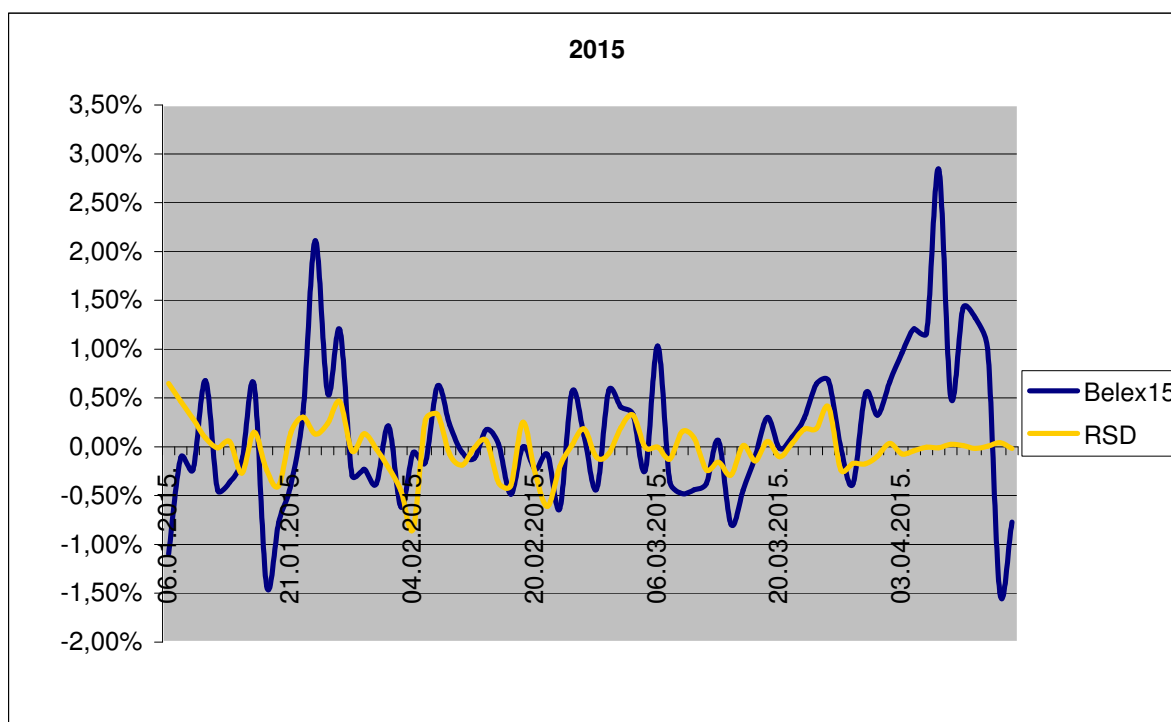
Grafikon 8



Grafikon 9



Grafikon 10



Grafikon 11

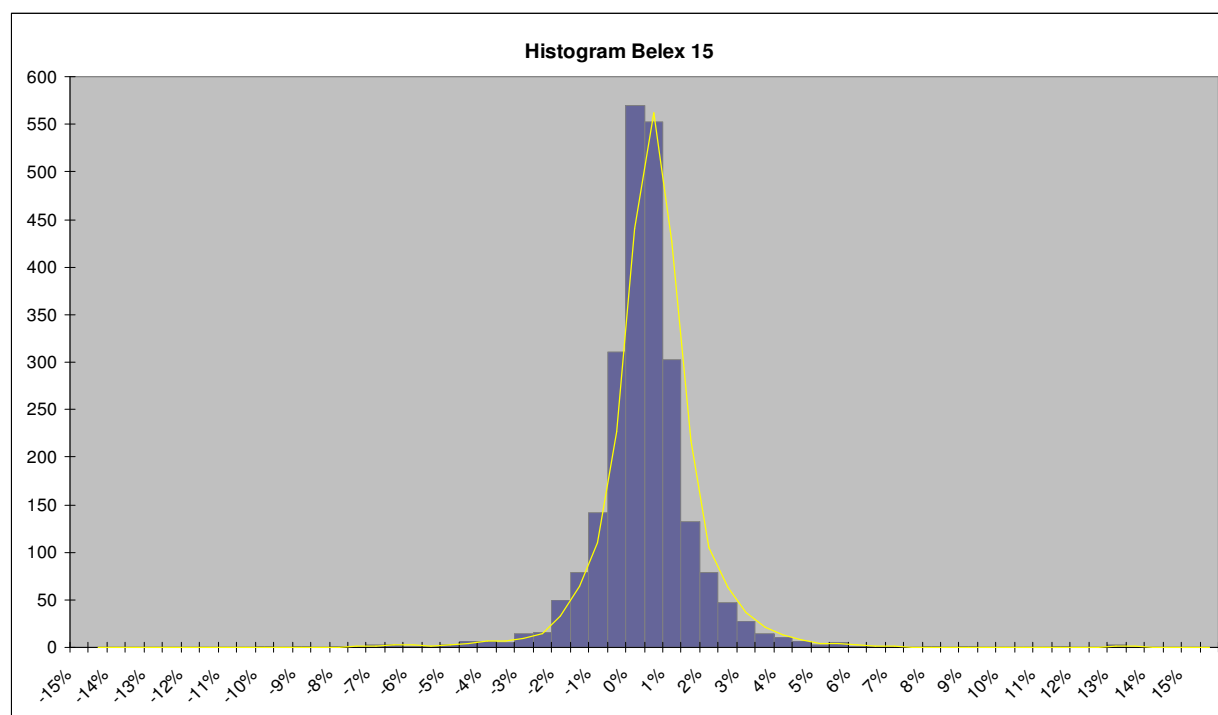
Ono što je kod istorijskih podataka zanimljivo jesu veliki skokovi odnosno padovi vrednosti prinosa. Razlozi za to mogu biti različiti. Trebe napomenuti da se u teoriji finansijskih tržišta smatra da je jedno tržište efikasno ukoliko dovoljno brzo i adekvatno reaguje na sve endogene i egzogene varijable. Te varijable (endogene) mogu biti vesti (povoljne ili nepovoljne) o određenoj kompaniji, kao što su vesti o promeni uprave, naglom skoku ili padu prodaje, dobiti, promenama u određenoj industrijskoj grani kojoj kompanija pripada i dr. Sa druge strane egzogene varijable mogu biti vesti o političkim promenama, uređenju ekonomskog sistema, kako u zemlji tako i van nje. Ovde govorimo o egzogenim varijablama. U našem slučaju možemo primetiti više naglih skokova u relativnom prinosu više indeksa Belex 15 nego vrednosti dinara. Primera radi, prvi datum koji upada u oči je 08.05.2007. godine (pad 5,26%) odsustvo dogovora za formiranje Vlade, pa odmah potom kao rezultat vesti 11.05.2007. godine usledio skok od 11,44%, taj dan je napravljen konačan dogovor DS-DSS-G17 o formiranju Vlade. 04.02.2008. godine (skok od 6,35%) objavljeni rezultati predsedničkih izbora. Jedini put kad je dinar imao veće promene vrednosti prinosa je kad je Monetarni odbor Narodne banke Srbije odlučio da dinarsku obaveznu rezervu, koju poslovne banke drže u centralnoj banci, poveća sa 20 na 40%, saopštila je NBS. 08.12.2008. (pad 3,60%). Razlog za pad je naravno što je većina banaka prodavala dinare zbog novonastalih nepovoljnih aktivnosti. Prethodno navedenim smo hteli objasniti šta je to efikasnost finansijskog tržišta, kako ono funkcioniše i približiti značajne promene u vrednosti indeksa Belex 15 i dinara.

3.6. Deskriptivna statistika i normalizacija podataka

Deskriptivna statistika Belex 15	
Mean	-0,00398%
Standard Error	0,02824%
Median	-0,00774%
Mode	0,00000%
Standard Deviation	1,38296%
Sample Variance	0,01913%
Kurtosis	14,62809395

Skewness	0,465376615
Range	23,22%
Minimum	-10,29%
Maximum	12,93%
Sum	-0,095513098
Count	2398
Confidence Level(95,0%)	0,000553799

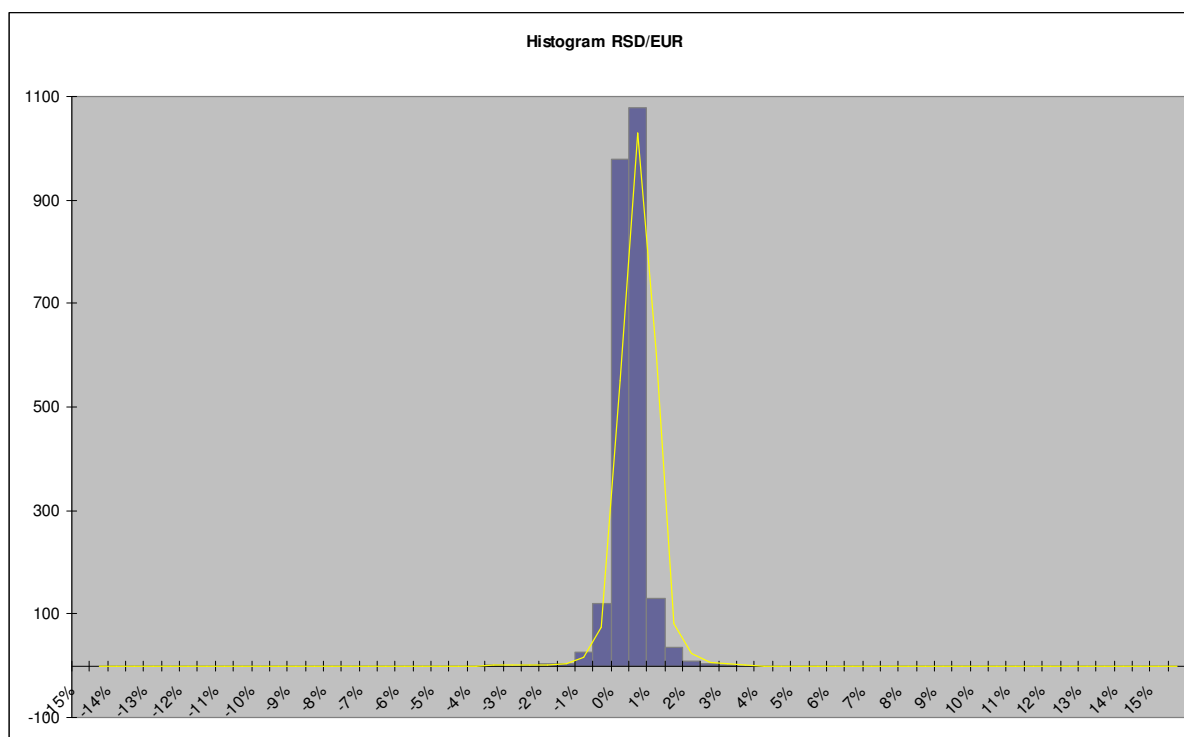
Tabela 1



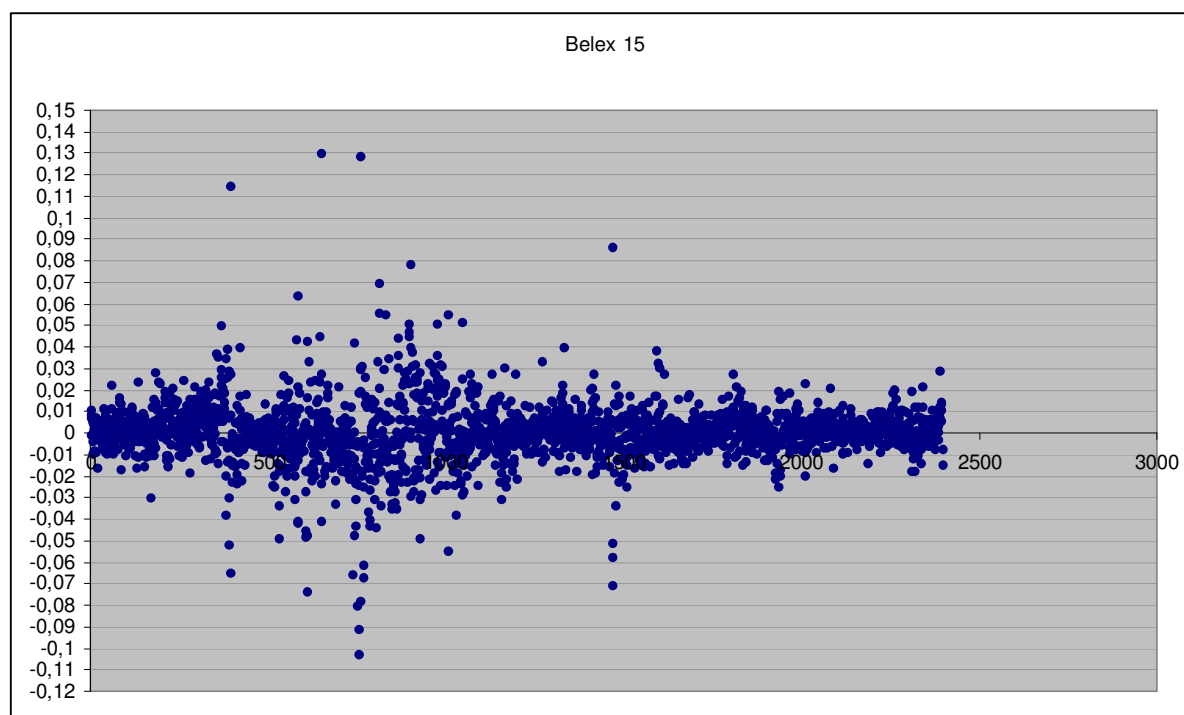
Grafikon 12

<i>Deskriptivna statistika RSD</i>	
Mean	0,01540%
Standard Error	0,00848%
Median	0,00961%
Mode	0,00000%
Standard Deviation	0,41526%
Sample Variance	0,00172%
Kurtosis	9,692879089
Skewness	-0,052563147
Range	6,5581%
Minimum	-3,6001%
Maximum	2,9580%
Sum	0,369525226
Count	2399
Confidence Level(95,0%)	0,000166255

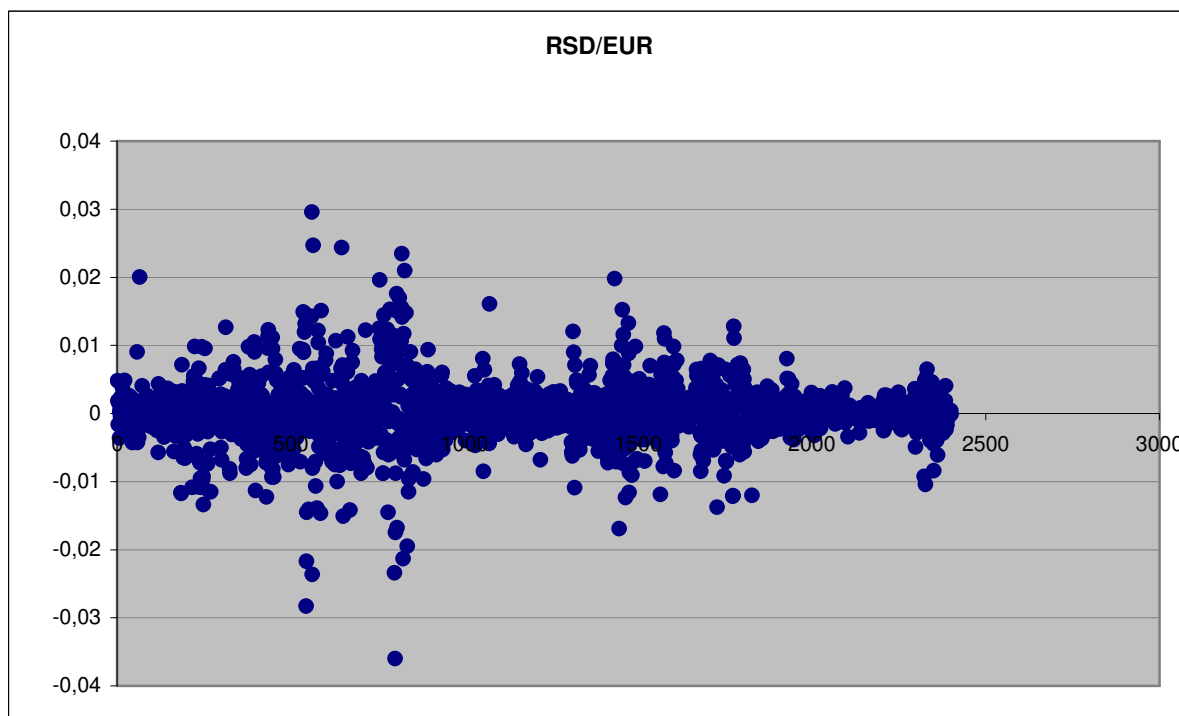
Tabela 2



Grafikon 13



Grafikon 14



Grafikon 15

Deskriptivna statistika za obe varijable je vršena na relativnim pokazateljima dnevnih promena vrednosti. Vidimo da se srednja vrednost (aritmetička sredina), kao i ostali parametri kreću u okviru vrednosti svojstvenih normalnoj raspodeli. Vrednosti kod kojih postoje odstupanja od normalnih su vrednosti spljoštenosti (kurtosisa) kao i maksimalnih i minimalnih vrednosti.

Možemo primetiti da su daleko veća i učestajia odstupanja od aritmetičke sredine kod vrednosti Belexa 15 nego vrednosti dinara. Tačnije, ukoliko gledamo odstupanja koja izlaze iz horizonta $\pm 3\%$ njih kod Belex 15 ukupno ima 92 (zanimljivo je primetiti da su podjednako raspoređena u obe krajnosti): 46 slučajeva je manje od -3% i 46 slučajeva je veće od 3% .

Sa druge strane kod vrednosti dinara postoji samo jedan slučaj koji prelazi vrednost od $+3\%$. Postoji logično objašnjenje za nesrazmerno veliku razliku u odstupanjima od normalnih vrednosti za ove dve varijable. Beogradska berza koja kreira metodologiju indeksa Belex 15, kao i svih pravila za funkcionisanje same berze je svojim Pravilima poslovanja utvrdila takozvanu donju i gornju zonu fluktuacije. Zona fluktuacije jeste najviša i najniža dozvoljena dnevna promena vrednosti akcija jedne kompanije. Zona fluktuacije zavisi kom segmentu tržišta pripadaju akcije i menjala se kroz istoriju berze. Ovim pravilima berza je dozvolila sve promene vrednosti sem onih koje bi dovele do opšte nestabilnosti na tržištu. Velike promene u vrednosti akcija određene kompanije, a samim tim i Indeksa Belex 15, su rezultat (kao što smo već i videli) vesti (povoljnih ili nepovoljnih) o kompaniji, tržištu, političkom sistemu, ekonomskom sistemu zemlje i dr.

Kod vrednosti dinara je malo drugačija situacija. Nadzor nad funkcionisanjem deviznog tržišta vrši Narodna banka Srbije. Imajući u vidu da promena vrednosti dinara utiče na sve koji imaju prihode i obaveze u dinarima, odnosno evrima, a ne samo investitore, Narodna banka Srbije vrši dnevno regulisanje (podešavanje) kursa dinara. Bitno je napomenuti da u teoriji postoje tri vrste kursa određene valute: fiksni kurs, slobodno formirani kurs i fluktuirajući kurs. Fiksni kurs mogu da formiraju pre svega zemlje sa velikim izvoznim suficitom tj. stalnim prilivom deviza, slobodno formiran kurs se teorijski gledano formira u zemljama sa visoko frekventnim i likvidnim finansijskim tržištem (sem u teoriji u praksi danas praktično ne postoji) i na kraju postoji fluktuirajući kurs. Fluktuirajući kurs je kurs dinara, naime Narodna banka Srbije intervencijama na deviznom tržištu, kupovinom odnosno prodajom deviza ili dinara utiče na

kurs tako da ne dozvoli prevelike dnevne oscilacije. Bitno je napomenuti da za razliku od Belexa 15 kod vrednosti dinara Narodna banka nema određenu gornju i donju zonu fluktuacije već je to pre svega diskreciona odluka. Ta diskreciona odluka nema svoj legislativni oblik, niti je određena u pogledu nivoa intervencije, jedina odrednica jeste da se trend ne menja. Ovo znači da Narodna banka interveniše do nivoa da ne dođe do velikih oscilacija, ali ne toliko značajno da dođe do promene trenda.

Što se tiče vrednosti spljoštenosti (kurtosisa), postoji logično objašnjenje. Imajući u vidu da imamo 2399 posmatranja i da se najveći broj njih kreće u intervalu $\pm 3\%$, tj. da je veliki broj vrednosti grupisan u malom intervalu, visoka vrednost spljoštenosti (Belex 15 14,62, odnosno RSD/EUR 9,69) je jasan rezultat toga.

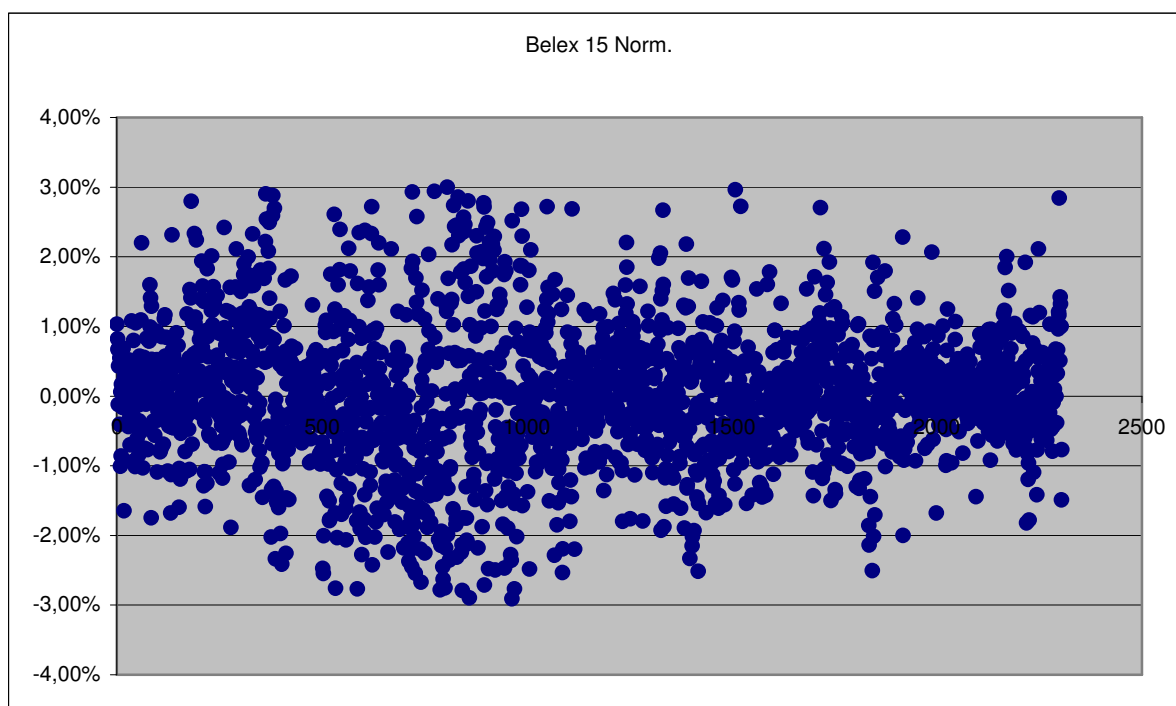
Imajući u vidu navedeno pristupili smo noromalizaciji podataka. Kako smo utvrdili da postoje ekstremne vrednosti odlučili smo da eliminišemo sve vrednosti koje su izvan praga $\pm 3\%$, takođe odlučili smo da ne vršimo bilo kakav uticaj na spljoštenost (bar ne u ovoj fazi istraživanja) iz razloga što nam je za naše istraživanje bitan uticaj jedne varijable na drugu u vremenskom horizontu dan za dan.

Isključili smo ukupno 93 vrednosti, od čega 92 pripadaju Belex 15, a jedna vrednosti dinara.

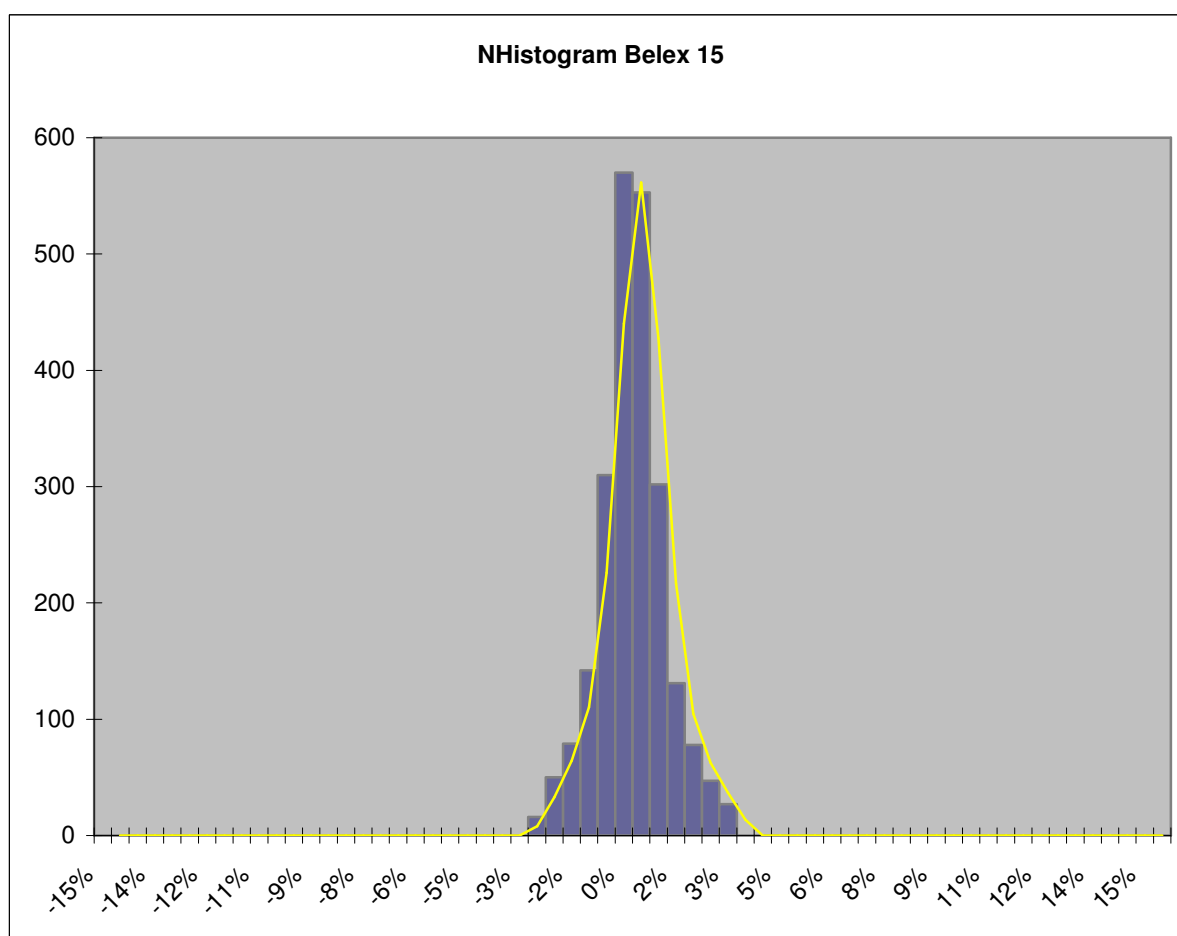
<i>Deskriptivna statistika Belex 15</i>		
	<i>Pre normalizacije</i>	<i>Posle normalizacije</i>
Mean	-0,00398%	0,00955%
Standard Error	0,02824%	0,00821%
Median	-0,00774%	0,00779%
Mode	0,00000%	0,00000%
Standard Deviation	1,38296%	0,39431%
Sample Variance	0,01913%	0,00155%
Kurtosis	14,62809395	8,855177888
Skewness	0,465376615	12,47238%
Range	23,22%	5,78977%
Minimum	-10,29%	-2,83180%
Maximum	12,93%	2,95797%
Sum	-0,095513098	0,220146654
Count	2398	2306
Confidence Level(95,0%)	0,000553799	0,000161022

Tabela 3

U gore Tabeli 3 vidimo vrednosti osnovnih parametara pre i posle normalizacije vrednosti Belexa 15. Vidimo da se aritmetička sredina pomerila blago u pozitivnu vrednost. Standardna greška je očekivano smanjena sa 0,02824% na 0,00821%. Ostali parametri su se takođe blago popravili (medijana, modus, varijansa, stepen asimetričnosti). Spljoštenost je pala sa 14,62 na 8,85, ali je i dalje iznad normale (oko 3).



Grafikon 16

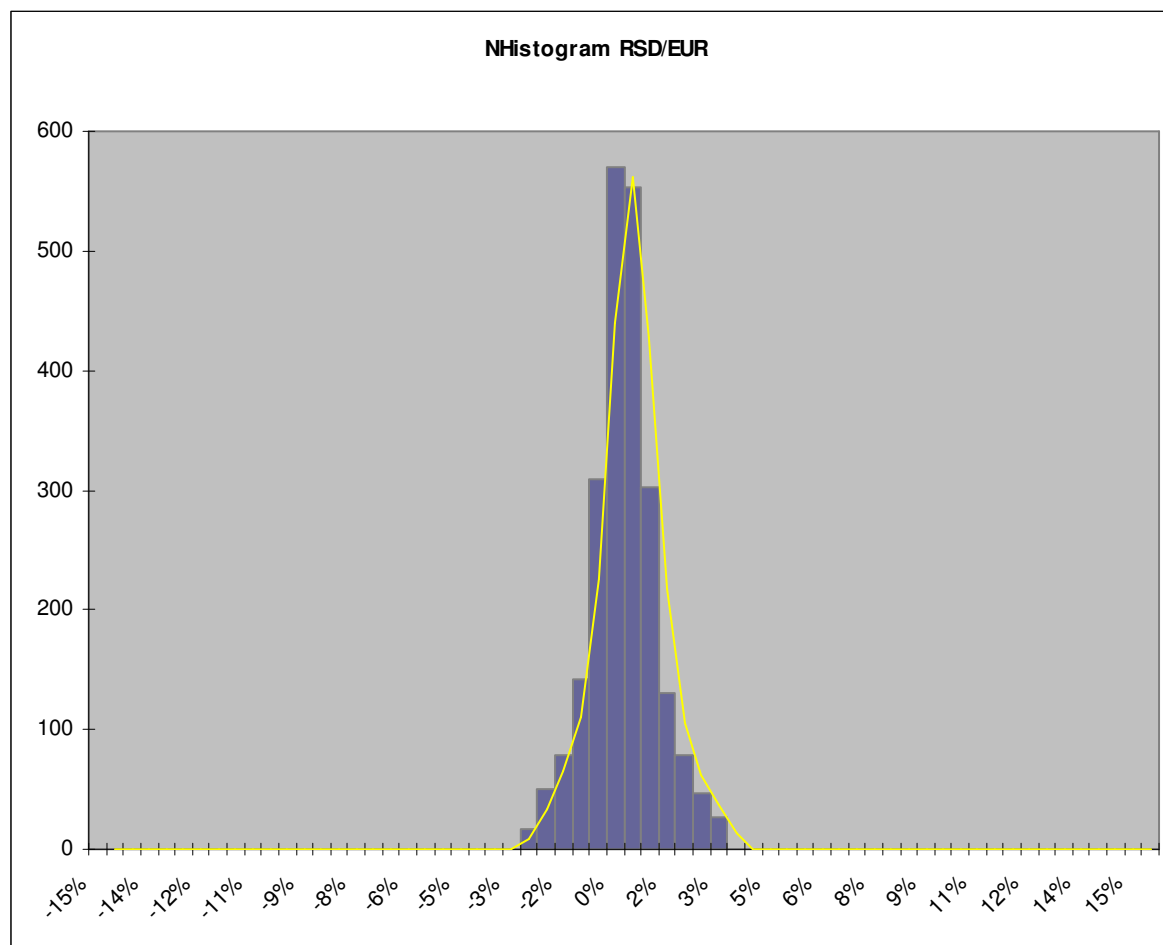


Grafikon 17

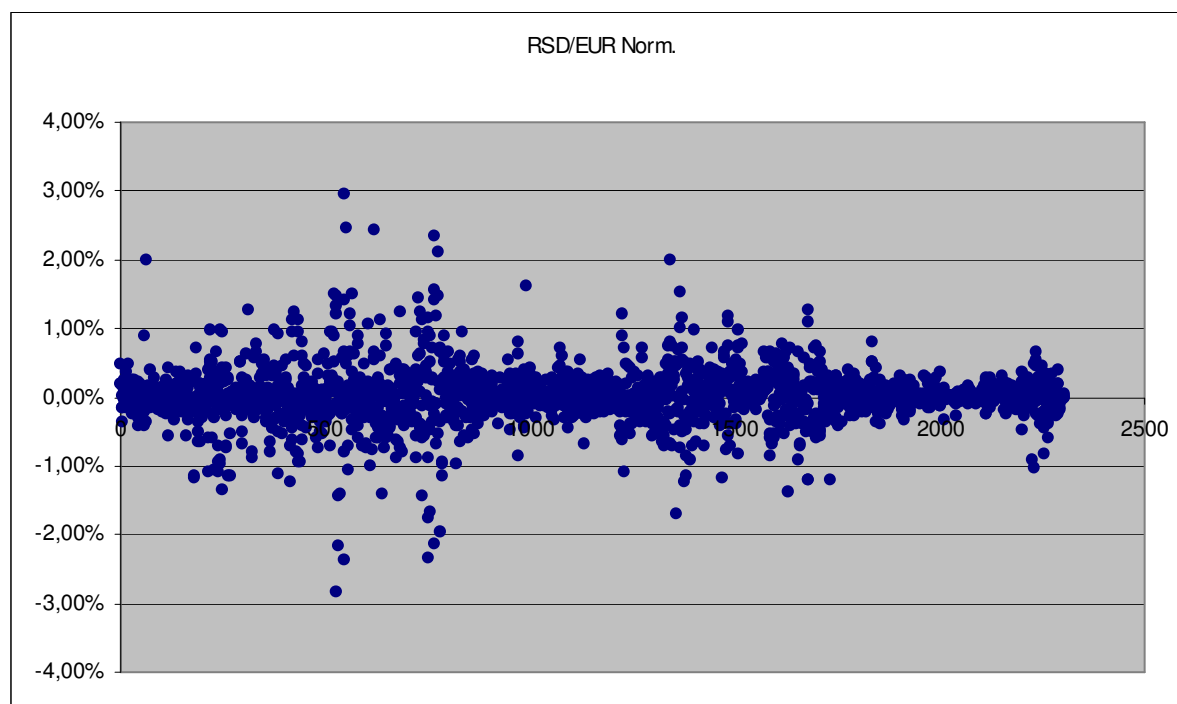
Deskriptivna statistika RSD			
	Pre normalizacije	Posle normalizacije	
Mean	0,01540%	0,0095%	
Standard Error	0,00848%	0,0082%	
Median	0,00961%	0,0078%	
Mode	0,00000%	0,0000%	
Standard Deviation	0,41526%	0,3943%	
Sample Variance	0,00172%	0,0016%	
Kurtosis	9,692879089	8,855177888	
Skewness	-0,052563147	0,124723814	
Range	6,5581%	0,057897652	
Minimum	-3,6001%	-2,832%	
Maximum	2,9580%	2,958%	
Sum	0,369525226	0,220146654	
Count	2399	2306	
Confidence Level(95,0%)	0,000166255	0,000161022	

Tabela 4

U Tabeli 4 vidimo rezultate osnovnih parametara pre i posle normalizacije vrednosti dinara prema evru. Aritmetička sredina se blago približila nuli. Standardna greška je očekivano smanjena sa 0,00848% na 0,0082%. Ostali parametri su se takođe blago popravili (medijana, varijansa, stepen asimetričnosti). Spljoštenost je pala sa 9,69 na 8,85, ali je i dalje iznad normale (normalna vrednost do 3).



Grafikon 18



Grafikon 19

4. PREDVIĐANJE VREDNOSTI INDEKSA BELEX 15

Osnovni cilj ovog istraživanja je da predvidimo vrednost indeksa Belex 15 koristeći istorijske podatke koji su nam dostupni do zadatog dana. Predviđanja formiramo za dan unapred, jer nam je cilj da na osnovu dostupnih podataka predvidimo šta će se desiti sledeći dan. Predviđanje za dan unapred vršimo na osnovu prinosa za 60 prethodnih dana.

Na vrednost indeksa Belex 15 utiče mnogo faktora i svakako bi se ovo istraživanje moglo proširiti na višefaktorsku analizu, ali u ovom radu se fokusiramo pre svega na uticaj kursa dinara.

Dakle, posmatramo pomerene serije podataka vezanih za prinose uzetih slučajnih promenljivih. Za procene vrednosti koristimo dva osnovna pristupa. Jedan je formiranje procene samo na osnovu relativne učestalosti istorijskih podataka (Laplasova ocena). Drugi pristup je da se pored relativne učestalosti uključi i Bajesov pristup (Bajesova ocena) tj. uslovne raspodele Belexa u odnosu na kurs.

4.1 Predviđanje na populaciji

Nakon izvršene normalizacije definisali smo raspodele za uzete varijable. Za kurs dinara odredili smo raspodelu da vrednost bude pozitivna ili negativna, odnosno da kurs u zadanom danu padne ili poraste. Za Belex 15 odredili smo distribuciju u tri scenarija, da je -1% (u šta smo uvrstili sve vrednosti manje od -0.5%), da je nepromenjen (sve dane kada je vrednost bila između -0.5 i +0.5%) i da je +1% (za sve dane kad je uzimao vrednost veću od +0.5%). Označićemo događaj da je vrednost kursa porasla sa A , nasuprot tome komplement A je događaj da je vrednost kursa u zadanom danu pala.

Koristićemo sledeće oznake

$RSD_{t-1} / B15_t$	-0,01	0	0,01	Σ
A_{t-1}	p_1	p_2	p_3	p_7
$\overline{A}_{t-1}$	p_4	p_5	p_6	p_8
Σ	p_9	p_{10}	p_{11}	

$$RSD_t : \begin{pmatrix} A_{t-1} & \overline{A}_{t-1} \\ p_7 & p_8 \end{pmatrix}$$

$$B15_t : \begin{pmatrix} -0.01 & 0 & 0.01 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

Treba naglasiti da koristimo 60 prethodnih vrednosti u ocenama koje formiramo, a ne ukupne podatke.

Od ukupno 2305 posmatranja (koliko imamo nakon normalizacije) u 1217 ili 52,80% kurs je porastao, dok je u 1088 odnosno 47,20% pao. Takođe broj slučajeva kada je vrednost Belexa bila manja od -0,01 je 597 (25,89%) nepromenjena je bila 1123 dana (48,70%), a veća od 0,01 585 dana (25,37%).

Raspodela izgleda ovako:

$RSD_{t-1} / B15_t$	-0,01	0	0,01	Σ
A_{t-1}	13,93%	25,60%	13,28%	52,80%
$\bar{A}_{t-1}$	11,97%	23,12%	12,10%	47,20%
Σ	25,90%	48,72%	25,38%	100,00%

Tabela 5

Iz Tabele 5 se vidi da kod uslovne raspodele imamo sledeće rezultate, broj slučajeva u kojima je vrednost dinara porasla, a vrednost Belex 15 pala za -0,01 je 321 (odnosno 13,93%), sa druge strane broj slučajeva da je dinar pao, a Belex 15 pao za -0,01 je 276 (11,97%). Belex 15 je ostao nepromenjen, a dinar porastao 590 slučajeva (25,60%), dok je dinar pao 533 puta (23,12%). U 306 slučajeva (13,28%) je dinar porastao kada je Belex 15 skočio za 0,01, dok je kod iste vrednosti Belexa 15 pao 279 puta (odnosno sa učestalosti od 12,10%).

Formula za relativnu ocenu

$$E(B15_t) = -0.01p_{9(t)} + 0p_{10(t)} + 0.01p_{11(t)}$$

Formula za Bejsovu ocenu

$$E(B15_t | A_{t-1}) = -0.01p_{12(t)} + 0p_{13(t)} + 0.01p_{14(t)}$$

$$E(B15_t | \bar{A}_{t-1}) = -0.01p_{12(t)} + 0p_{13(t)} + 0.01p_{14(t)}$$

Predviđeni prinos formiramo tako što uzimamo $E(B15_t | A_{t-1})$ ukoliko je prethodnog dana identifikovan porast kursa. U suprotnom uzimamo $E(B15_t | \bar{A}_{t-1})$.

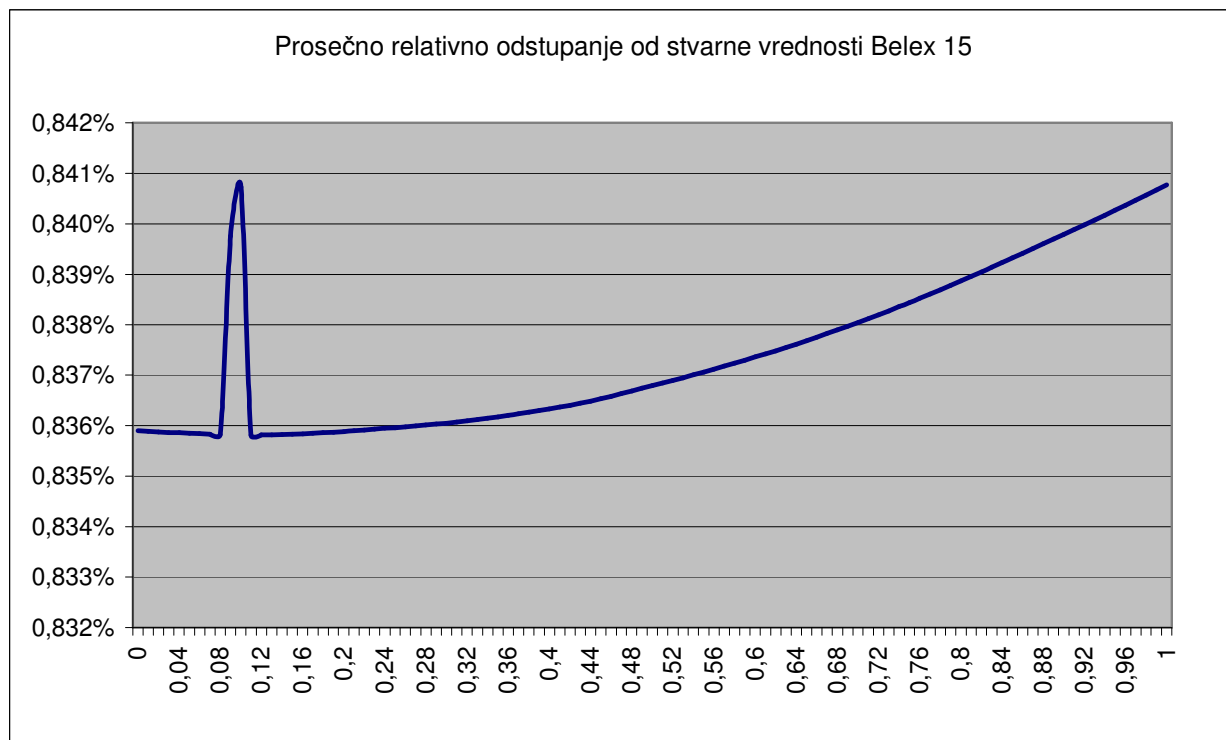
Na osnovu predstavljenih metoda dobili smo sledece rezultate. Prosečno odstupanje na osnovu Bajesove ocene od stvarnih vrednosti za zadati (od 2005 do 2015) period je 0,836% (odnosno 8,73 bazna poena). Za Laplasovu ocenu u istom periodu odstupanje je veće i iznosi 0,841% (8,77 bazna poena).

U proučavanju dobijenih rezultata za relativnu učestalost i bajesovu ocenu došli smo do ideje da razmotrimo uključivanje težinskih koeficijenata (pondera) za obe ocene. Pristupili smo odabiru najboljeg pondera tj. vrednosti Θ koji daje najbolju, odnosno najpribližniju predviđenu vrednost u odnosu na stvarne istorijske vrednosti indeksa Belex 15. Parametar Θ je pri tome za Bajesovu i Laplasovu ocenu, mogao uzeti vrednosti od 0 do 1, odnosno od 0% do 100%. Razlog za ovaj pristup leži u činjenici što smo hteli proveriti koja Θ tj. učešća ove dve ocena daje najbolje predviđanje vrednosti indeksa Belex 15 pod uticajem promene vrednosti dinara.

Pristupili smo zatim izboru optimalne konveksne kombinacije. Bajesovu ocenu smo označili sa B, dok smo Laplasovu sa R

$$T = B(B15_t)(1 - \Theta) + R(B15_t)\Theta$$

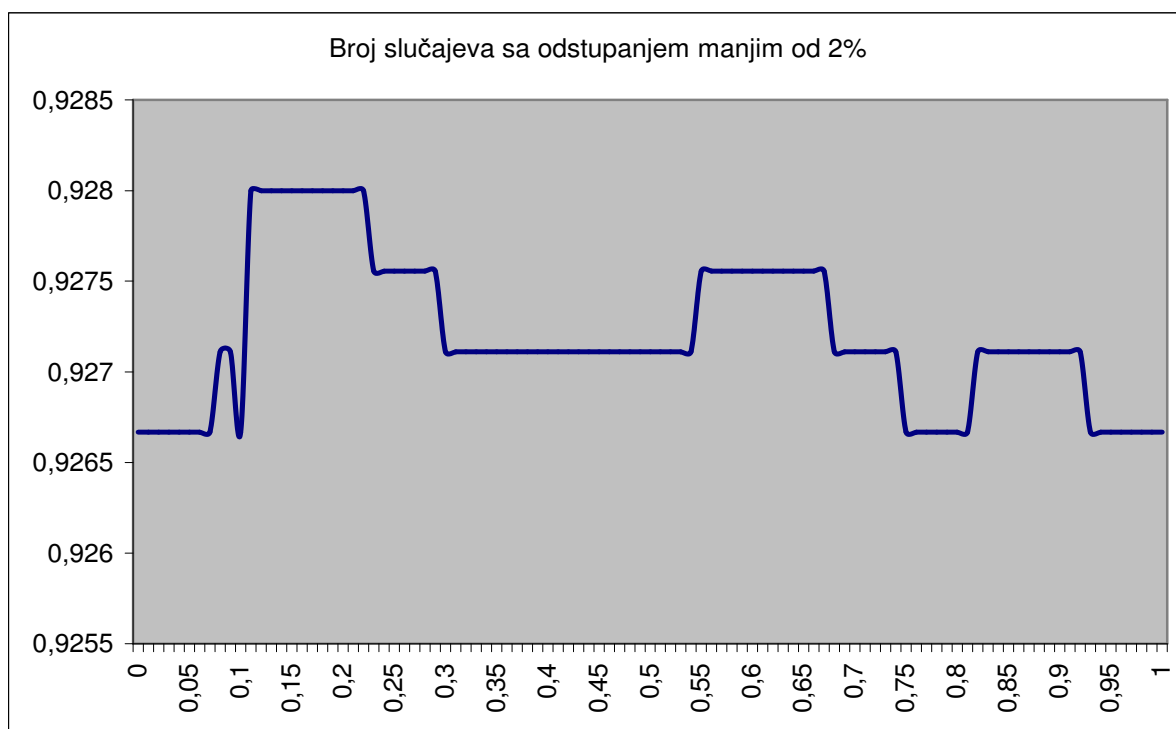
Pretpostavka je bila da računamo koja kombinacija vrednosti Θ nam daje najmanje relativno odstupanje od stvarne vrednosti indexa Belex 15. Dobili smo sledeće rezultate:



Grafikon 20

Iz Grafikona 20 jasno se vidi da vrednosti Θ koje daju veći ponder Bajesovoj oceni daju bolje rezultate predviđanja od Laplasove ocene. Tačnije najbolje rezultate daje odnos 0.94 na spram 0.06, gde je iznos odstupanja je 0,8358%. Takođe na Grafikonu 20 lako možemo uočiti nepravilnosti koje se odnose na vrednost kada je Θ za Bajesovu ocenu 0.90 i 0.91. U daljoj razradi ćemo pokušati otkloniti istu.

U daljoj analizi želeli smo da proverimo optimalni izbor teta koji će nam dati najveći broj slučajeva sa dnevnim odstupanjem manjim od 2% u odnosu na stvarne vrednosti.



Grafikon 21

Iz Grafikona 21 je jasno da najbolji izbor Θ , tj. onaj sa najvećim brojem slučajeva 92,8% (odnosno njih 2088 od 2250) sa dnevnim odstupanjem manjim od 2%, kada je vrednost u korist Bajesove ocene 0.89 do 0.78. Dalje na Grafikonu vidimo da je ta vrednost namanja na krajevima tj. kada je težinski koeficijent za Laplasovu ocenu 1 i kada je za Bajesovu ocenu 1.

Nakon izvršenih prethodnih analiza želeli smo da proverimo da li promenama u toku vremenskog horizonta, možemo popraviti rezultat tj. da li možemo dobiti preciznije predviđanje. Kreirali smo adaptivno predviđanje koje bi u suštini uzimalo vrednost Θ za t , ekvivalentno onoj koja daje najbolje rezultate u $t-1$. Ovim načinom smo dobili da je ukupno prosečno odstupanje od stvarne vrednosti 0,8361%. Od čega je ukupno prosečno odstupanje do 2015. 0,8466%, a za samu 2015. godinu 0,5151%. Ovo je ne uzimajući ponaosob 2015. godinu za nijansu lošiji rezultat od prethodno navedene kombinacije Laplasove i Bajesove ocene.

4.2 Predviđanje indeksa Belex 15 – finija diskretizacija zavisnih varijabli

Imajući sve do sada izloženo, posebno osvrćući se na “nepravilnost” u Grafikonu 20 pristupili smo finijoj raspodeli varijabli, odnosno finijoj diskretizaciji. Hteli smo istražiti koliko će finija diskretizacija da utiče na rezultate.

Raspodela za vrednost dinara ostaje ista tj. vrednost može biti pozitivna ili negativna, odnosno da kurs u zadatom danu padne ili poraste. Za Belex 15 odredili smo finiju distribuciju u pet scenarija da je -1% (u šta smo uvrstili sve vrednosti veće od -0.75%), da je -0.5% (što su sve vrednosti u intervalu -0.75% do -0.25%) da je nepromenjena (sve dane kada je vrednost bila između -0.25 i +0.25%), da je da je 0.5% (sve vrednosti u intervalu 0.25% do 0.75%) i +1% (za sve dane kad je uzimao vrednost veću od +0.75%). Opet smo označili verovatnoću da ja vrednost kursa porasla sa A , nasuprot tome komplement A je verovatnoća da je vrednost kursa u zadatom danu pala.

$RSD_{t-1} / B15_t$	-0,01	-0,005	0	0,005	0,01	Σ
A_{t-1}	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_{11}
$\bar{A}_{t-1}$	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{12}
Σ	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	

$$RSD_t : \begin{pmatrix} A_{t-1} & \bar{A}_{t-1} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} \quad B15_t : \begin{pmatrix} -0,01 & -0,005 & 0 & 0,005 & 0,01 \\ p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \end{pmatrix}$$

Formula za Laplasovu ocenu

$$E(B15_t) = -0,01p_{12(t)} + -0,005p_{13(t)} + 0p_{14(t)} + 0,005p_{15(t)} + 0,01p_{16(t)}$$

Formula za Bejsovu ocenu

$$E(B15 | A_{t-1}) = -0,01p_{17(t)} + -0,005p_{18(t)} + 0p_{19(t)} + 0,005p_{20(t)} + 0,01p_{21(t)}$$

$$E(B15 | \bar{A}_{t-1}) = -0,01p_{17(t)} + -0,005p_{18(t)} + 0p_{19(t)} + 0,005p_{20(t)} + 0,01p_{21(t)}$$

Opet treba naglasiti da koristimo 60 prethodnih vrednosti u ocenama koje formiramo, a ne ukupne podatke.

Kao što smo ranije naveli, od ukupno 2305 posmatranja (koliko imamo nakon normalizacije) u 1222 ili 53,02% kurs je porastao, dok je u 1083 odnosno 46,98% pao. Broj slučajeva kada je vrednost Belexa bila manja od -0,01 je 419 (18,18%), kada je -0,005 (odnosno u intervalu od -0,0075 do -0,0025) 433 (18,78%), nepromenjena je bila 630 dana (27,33%), 0,005 (odnosno u intervalu od 0,0075 do 0,0025) 421 put (18,26%), a veća od 0,01 402 puta (17,43%).

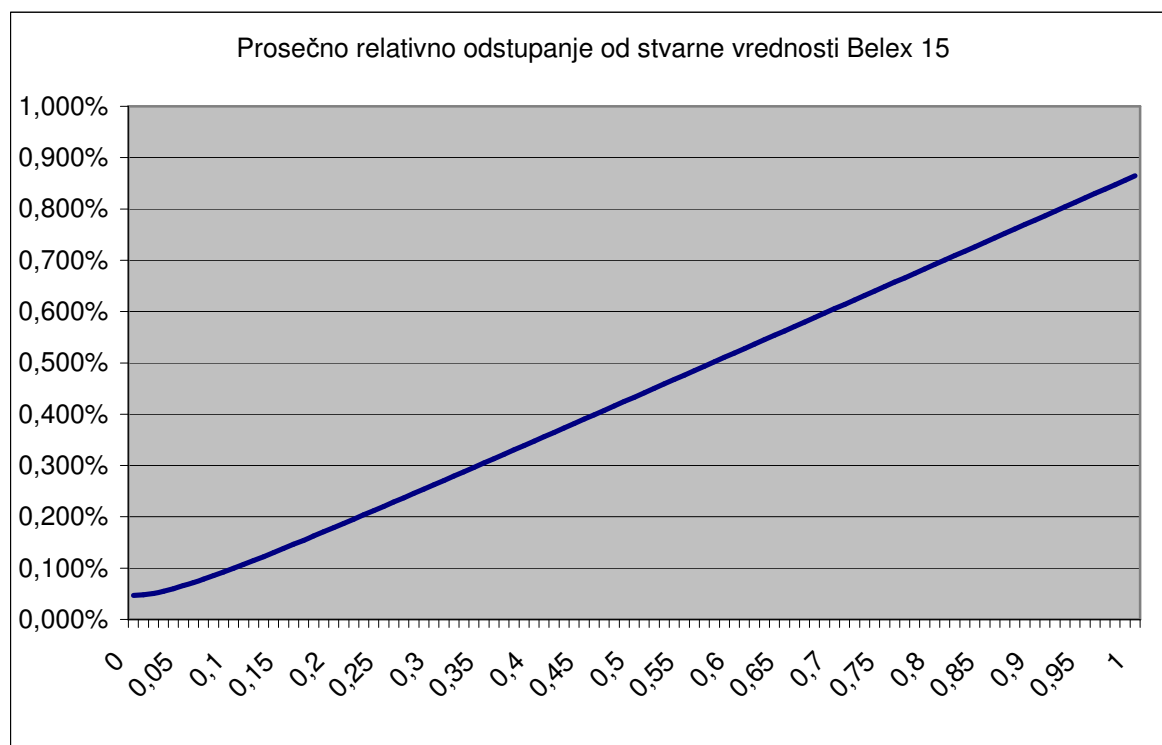
Raspodela na celom uzorku izgleda ovako:

$RSD_{t-1} / B15_t$	-0,01	-0,005	0	0,005	0,01	Σ
A	9,98%	9,72%	13,84%	10,50%	8,98%	53,02%
$\bar{A}$	8,20%	9,07%	13,49%	7,77%	8,46%	46,98%
Σ	18,18%	18,79%	27,33%	18,26%	17,44%	100,00%

Tabela 6

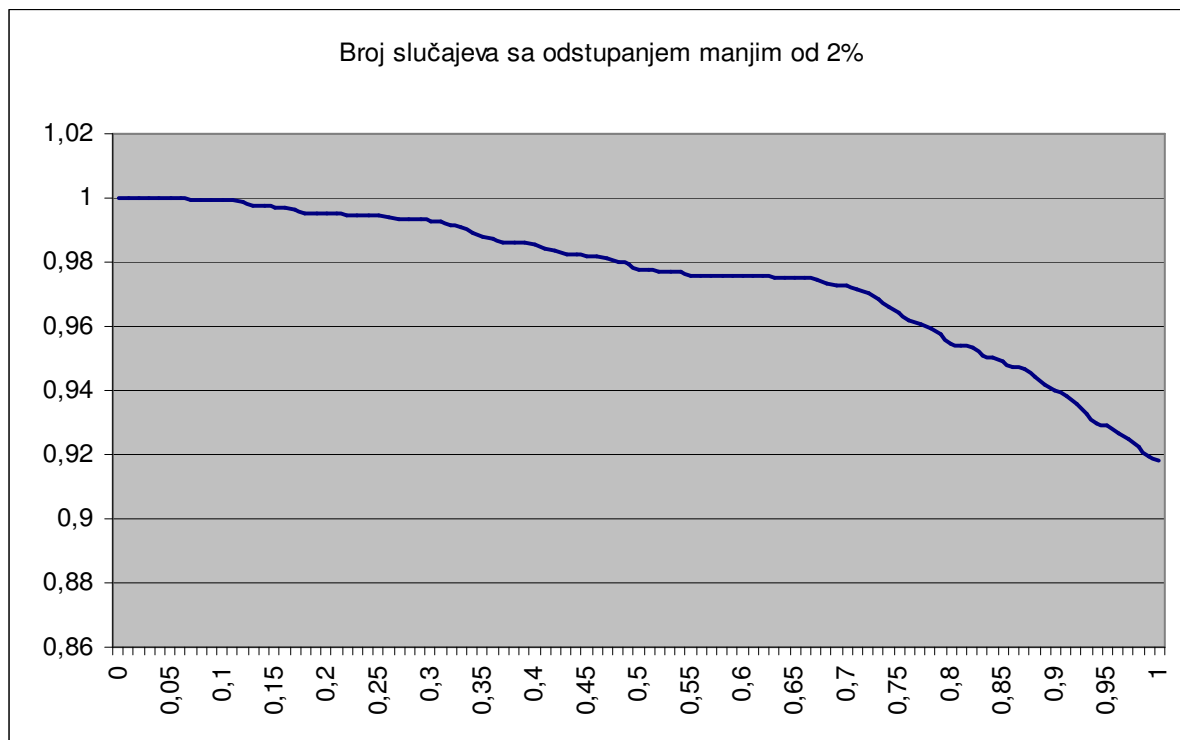
Iz Tabele 6 se vidi da imamo sledeće rezultate, broj slučajeva u kojima je vrednost dinara porasla, a vrednost Belex 15 pala za -0,01 je 230 (odnosno 9,98%), sa druge strane broj slučajeva da je dinar pao, a Belex 15 pao za -0,01 je 189 (8,20%). Broj slučajeva u kojima je vrednost dinara porasla, a vrednost Belex 15 pala za -0,005 je 224 (odnosno 9,72 %), sa druge strane broj slučajeva da je dinar pao, a Belex 15 pao za -0,005 je 189 (9,07%). Belex 15 je ostao nepromenjen, a dinar porastao 319 slučajeva (13,40%), dok je dinar pao 311 puta (13,49%). Belex 15 je ostao nepromenjen, a dinar porastao 319 slučajeva (13,40%), dok je dinar pao 311 puta (13,49%). Broj slučajeva u kojima je vrednost dinara porasla, a vrednost Belex 15 porasla za 0,005 je 242 (odnosno 10,50%), sa druge strane broj slučajeva da je dinar pao, a Belex 15 skočio za 0,005 je 179 (7,77%). U 207 slučajeva (8,98%) je dinar porastao kada je Belex 15 skočio za 0,01, dok je kod iste vrednosti Belexa 15 pao 195 puta (odnosno sa učestalosti od 8,46%).

Po izvršenoj finijoj diskretizaciji raspodela za Belex 15 dobili smo sledeće rezultate.



Grafikon 22

Ono što možemo videti iz Grafikona 22 jeste da su se rezultati prosečnog relativnog odstupanja u mnogome poboljšali finijom raspodelom. Vidimo da je odstupanje najmanje kada je Bajesova ocenu u pitanju i iznosi 0,047% što je veliki pomak u odnosu na prethodno korištenu raspodelu gde je najmanje relativno prosečno odstupanje bilo 0,8358% (kada je ponder za Bajesovu ocenu 0,94). Takođe iz grafikona vidimo da se smanjenjem pondera za Bajesovu ocenu skoro pravolinijski povećava prosečno relativno odstupanje od stvarne vrednosti indeksa Belex 15 da bi na kraju sa ponderom 1 za Laplasovu ocenu iznosilo 0,865%.



Grafikon 23

Iz Grafikona 23 je jasno da najbolji izbor Θ , tj. onaj sa najvećim procentom slučajeva (njih 100%) sa dnevnim odstupanjem manjim od 2%, kada je ponder za Bajesovu ocenu 1. Na grafikonu vidimo da je ta vrednost namanja kada je Laplasova ocena u pitanju.

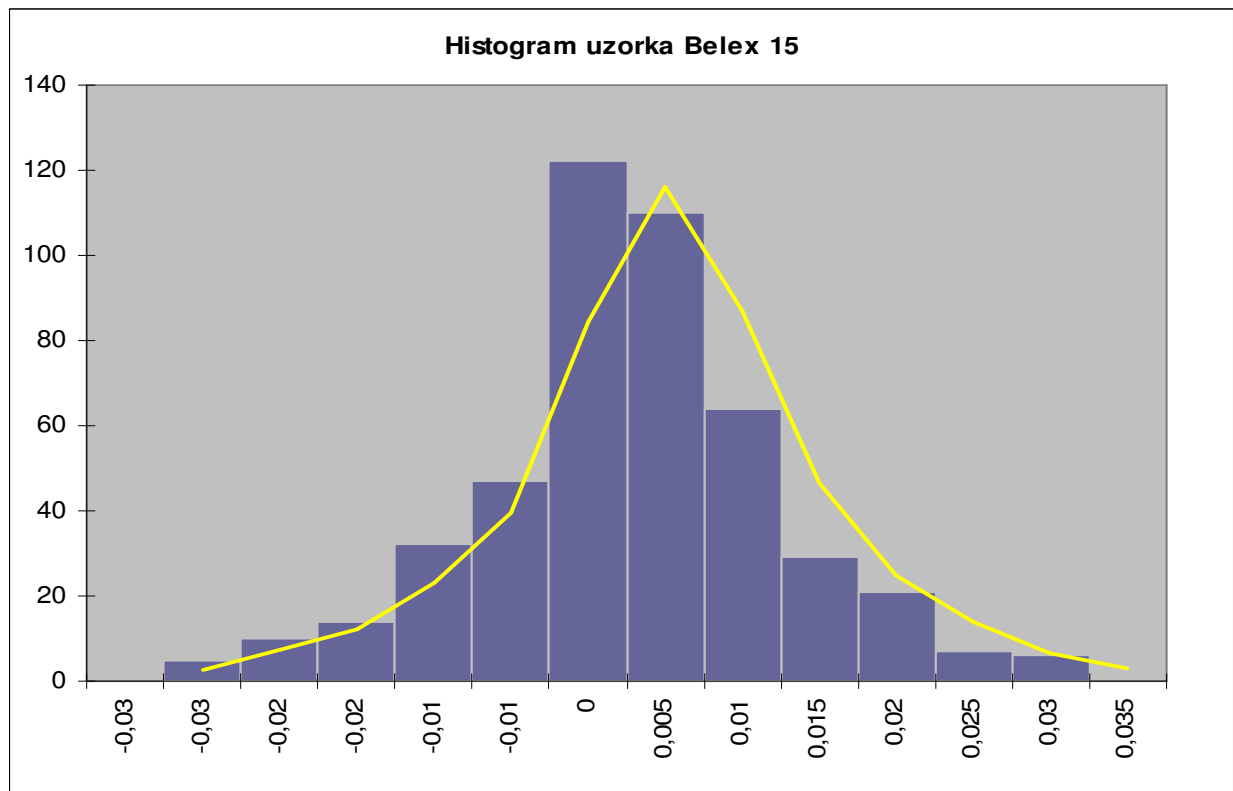
4.3 Testiranje predviđanja na slučajnom uzorku

Dalje smo testirali dobijene rezultate na uzorku. Odredili smo da uzorak iznosi 20% od testirane populacije od 2305 posmatranja. Kreirali smo uzorak slučajnim odabirom, pri čemu je svako posmatranje bez obzira na to kojoj godini pripada imalo podjednaku mogućnost ulaska u uzorak.

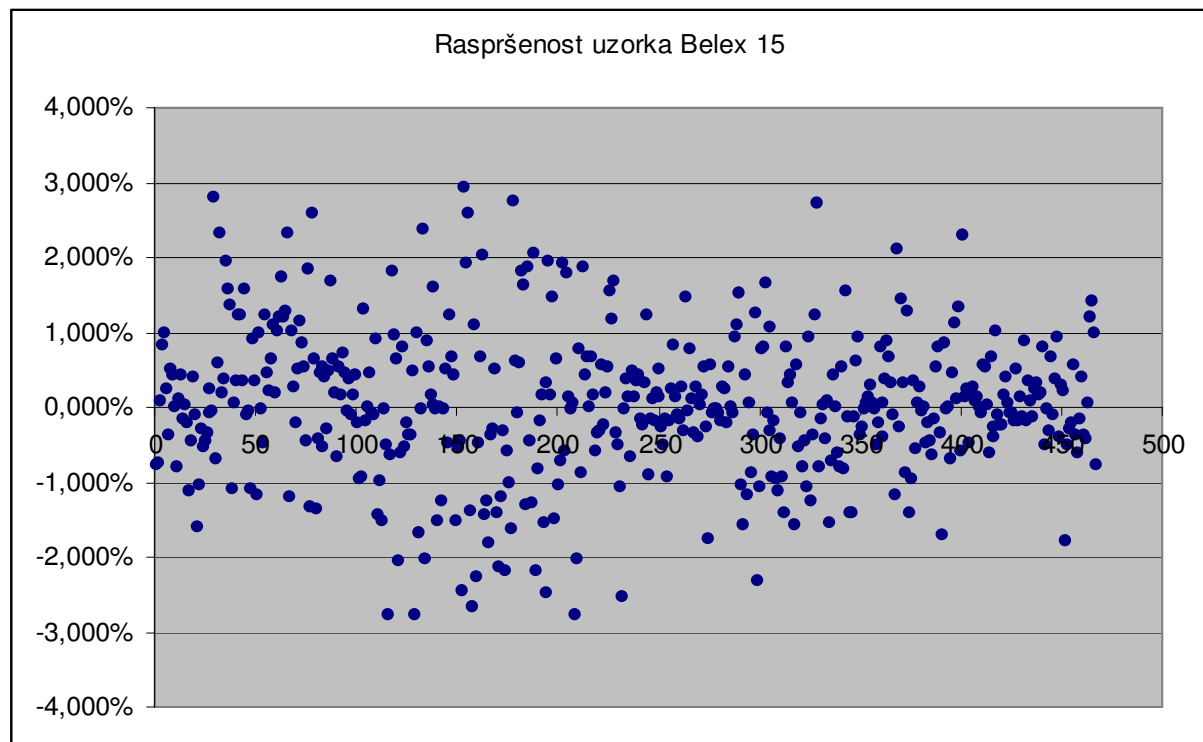
Na kraju smo dobili slučajan uzorak od 467 posmatranja, sa sledećim karakteristikama za indeks Belex 15:

Deskriptivna statistika uzorka Belex 15	
Mean	0,0311%
Standard Error	0,0447%
Median	0,0040%
Mode	-0,0340%
Standard Deviation	0,9661%
Sample Variance	0,0093%
Kurtosis	0,749092167
Skewness	-0,003509036
Range	5,7010%
Minimum	-2,7700%
Maximum	2,9310%
Sum	0,14542
Count	467
Confidence Level(95,0%)	0,000878

Tabela 7



Grafikon 24



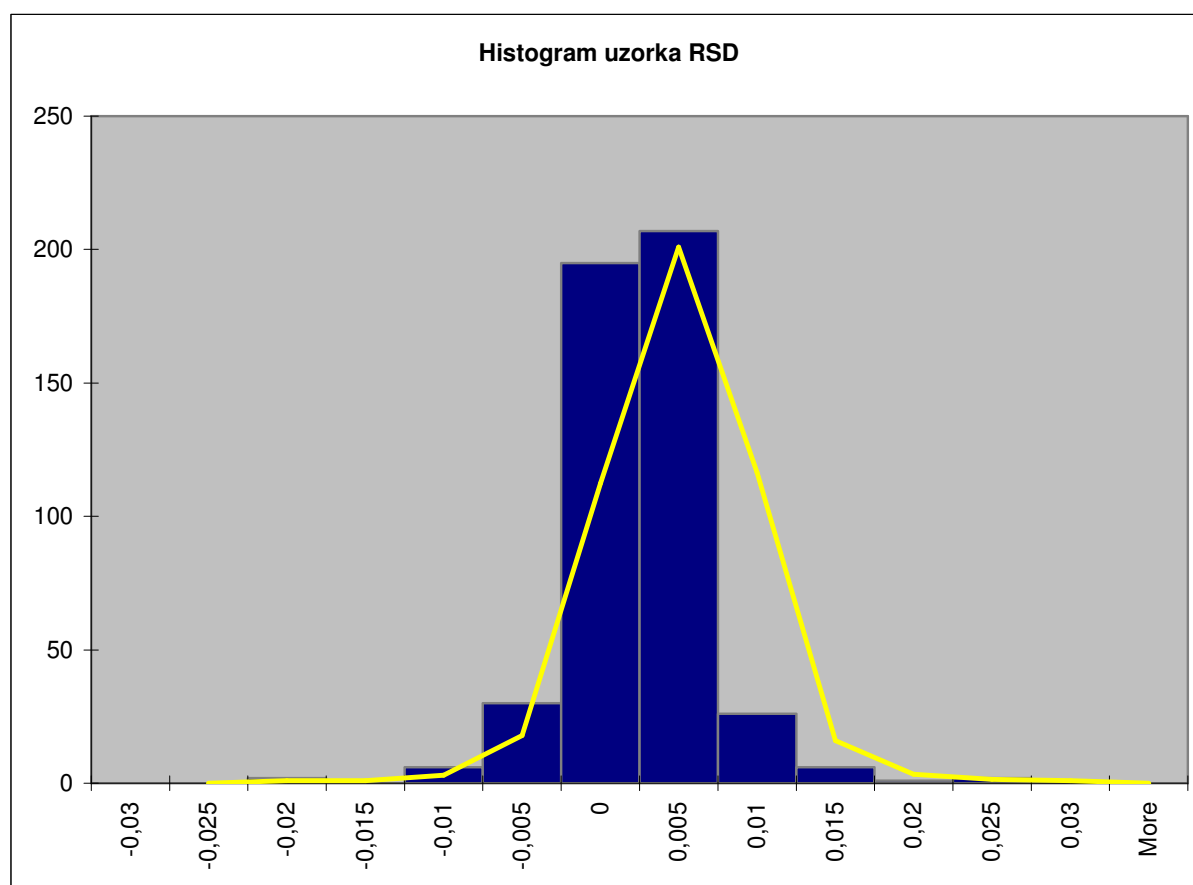
Grafikon 25

U tabeli 7 vidimo da su svi parametri uzorka u okviru svojstvenom za normalnu distribuciju. Kurtosis koji je bio iznad dozvoljenih vrednosti sada je u dozvoljenim okvirima od 0,749. Histogram u Grafikonu 24 pokazuje normalnu raspodelu podataka, kao i Grafikon 25 gde imamo prikaz ravnomerne raspršenosti istih.

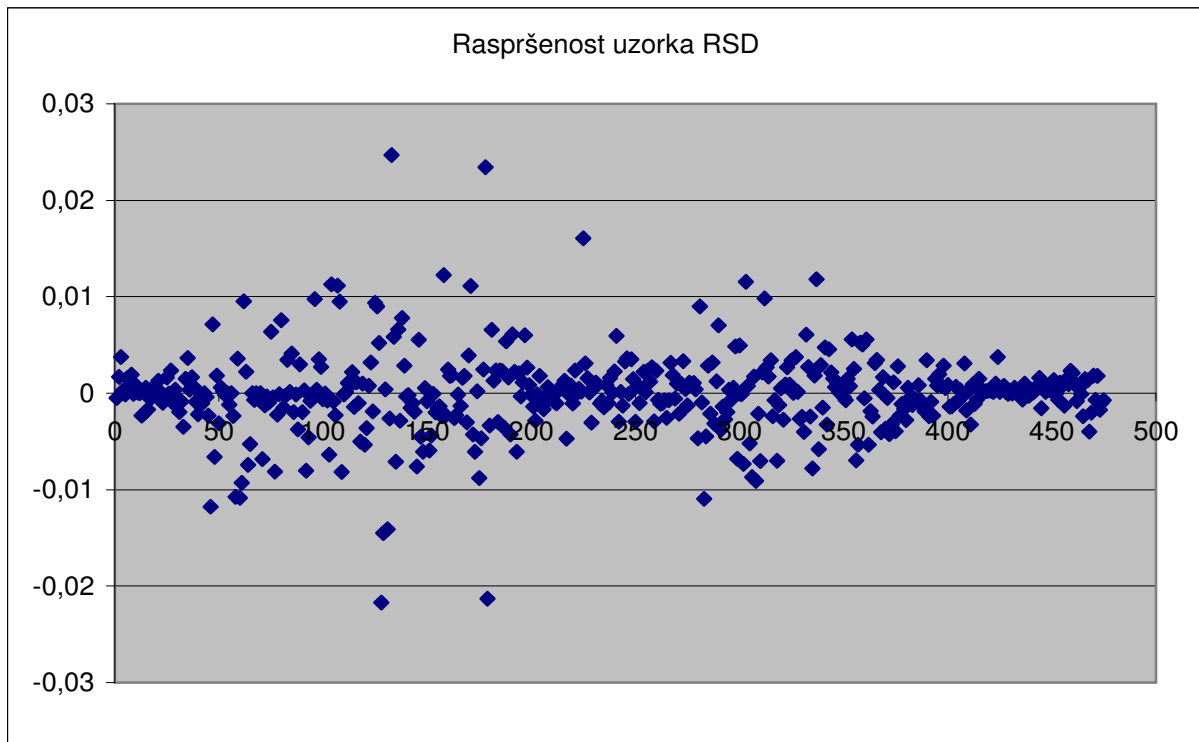
Deskriptivna statistika uzorkaRSD

Mean	-0,0021%
Standard Error	0,0192%
Median	0,0060%
Mode	0,0000%
Standard Deviation	0,4192%
Sample Variance	0,0018%
Kurtosis	8,067891165
Skewness	0,287237904
Range	4,64023%
Minimum	-2,17125%
Maximum	2,46898%
Sum	-0,010063795
Count	475

Tabela 8

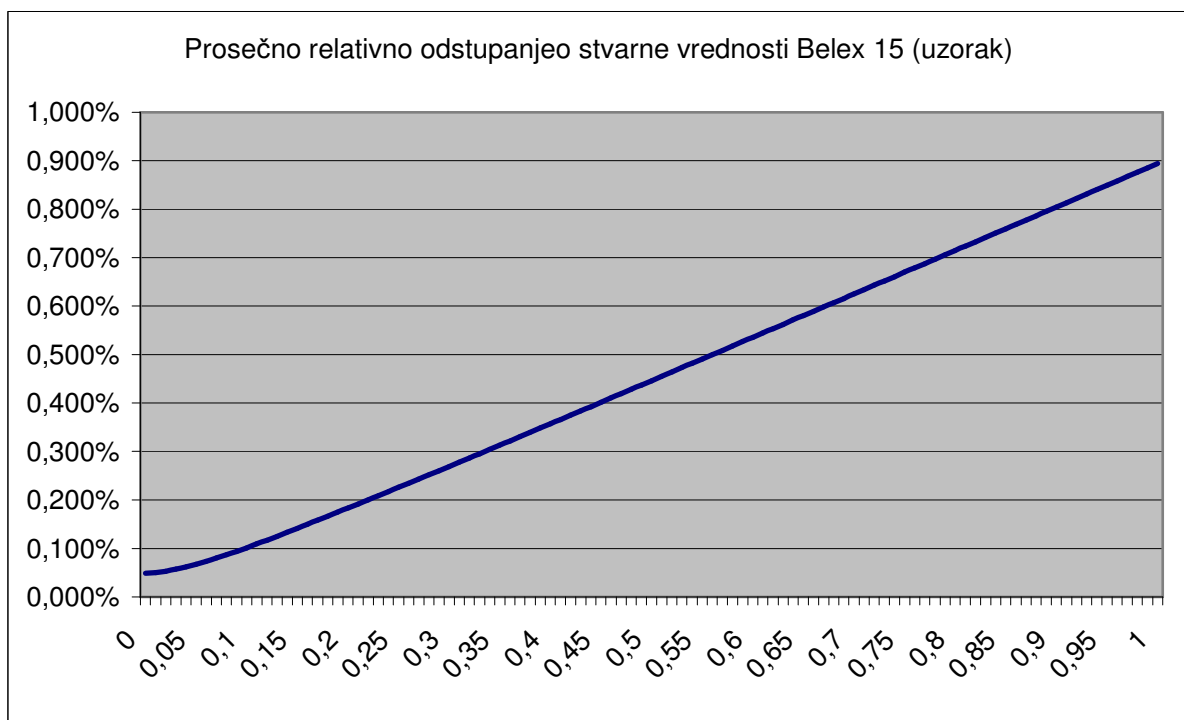


Grafikon 26



Grafikon 27

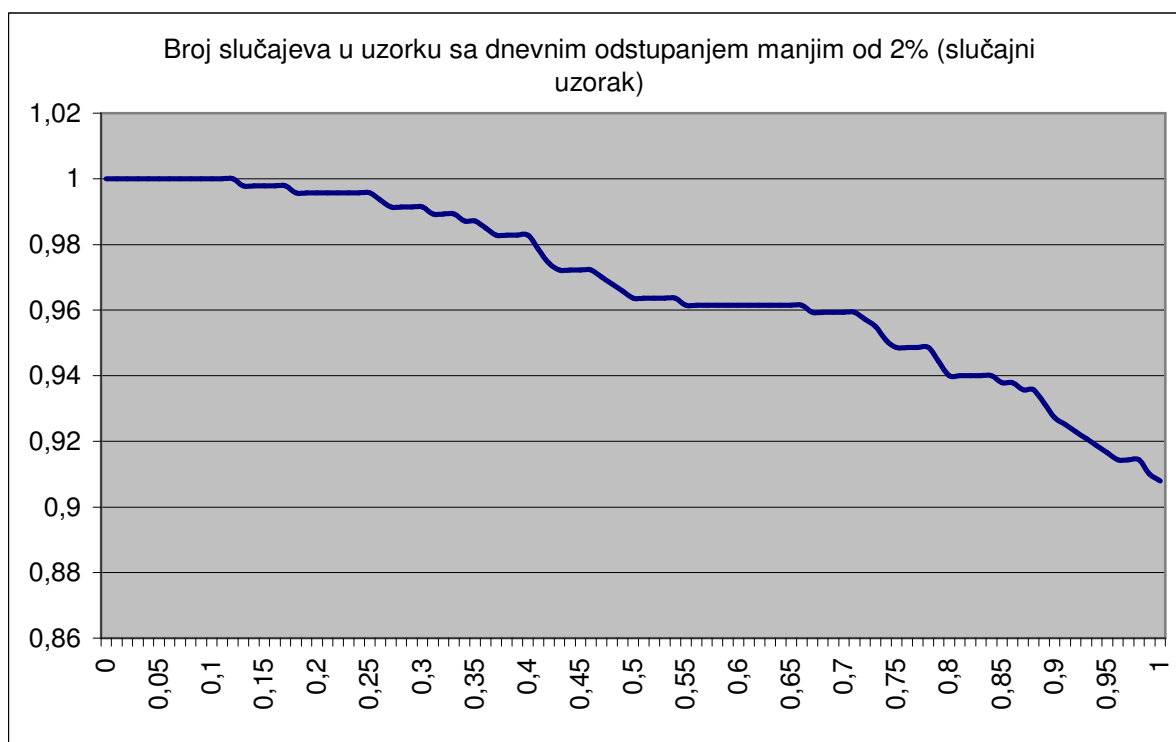
U tabeli 8 vidimo da su svi parametri uzorka u okviru svojstvenom za normalnu distribuciju. Kurtosis je ostao i dalje visok (8,07) i iznad je dozvoljenih vrednosti (do 3) što je rezultat pe svega jer je u pitanju kontrolisana varijabla (kao što smo naveli u ranijem izlaganju od strane Narodne banke Srbije). Histogram u Grafikonu 26 pokazuje normalnu raspodelu podataka, dok Grafikon 25 (grafikon raspršenosti) prikazuje mesta grupisanih vrednosti.



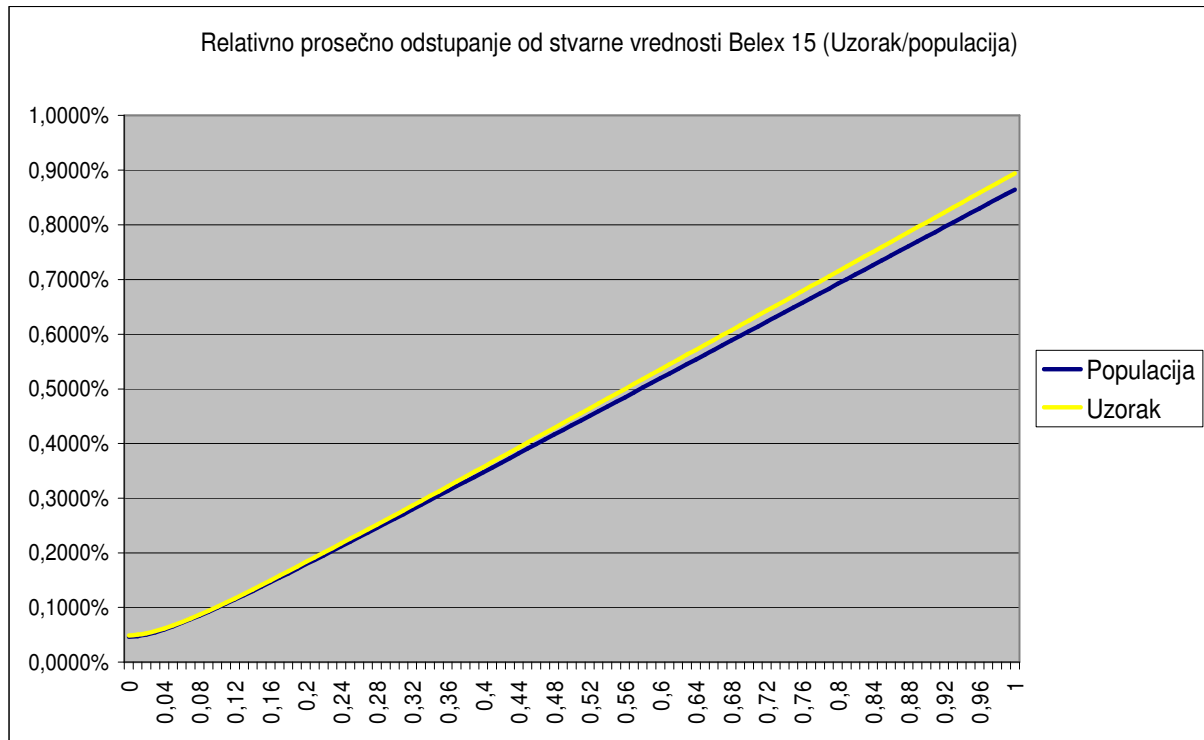
Grafikon 28

Kod Grafikona 28 vidimo da rezultati prosečnog relativnog odstupanja imaju istu tendenciju kao i kod populacija tj kao na grafikonu 22. Vidimo da je odstupanje najmanje za Bajesovu ocenu i iznosi 0,049% (kod populacije 0.047%) dok je najveće kada je Θ jednaka 0 i iznosi 0,894% (kod populacije 0.865%). Takođe iz grafikona vidimo da se smanjenjem pondera za bajesovu ocenu skoro pravolinijski povećava prosečno relativno odstupanje od stvarne vrednosti indeksa Belex 15 da bi na kraju sa učešćem relativen ocene od 1 iznosilo 0.865%.

Iz Grafikona 29 je jasno da najbolji izbor Θ , tj. onaj sa najvećim brojem slučajeva sa dnevnim odstupanjem manjim od 2%, kada je vrednost 0 (100% odstupanja je u okviru +/-2%). Dalje na Grafikonu vidimo da je ta vrednost najmanja kada je Θ 1 i iznosi 90,79%.



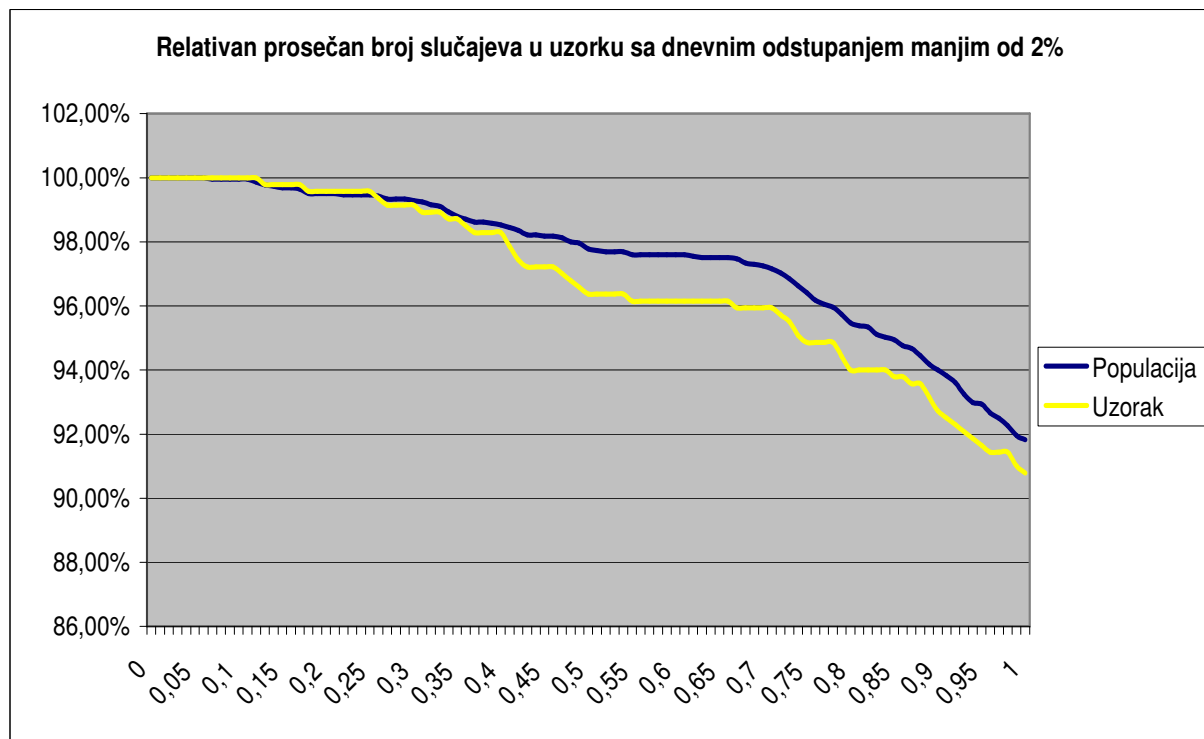
Grafikon 29



Grafikon

30

Grafikon 30 nam pokazuje odstupanje od stvarne vrednosti indeksa Belex 15 za populaciju od 2305 posmatranja i uzorak od 467 posmatranja. Primećujemo da je odstupanje veće kod uzorka. Prosečno odstupanje za sve vrednosti Θ za populaciju je 0,437% , dok je za uzorak 0,450%.



Grafikon 31

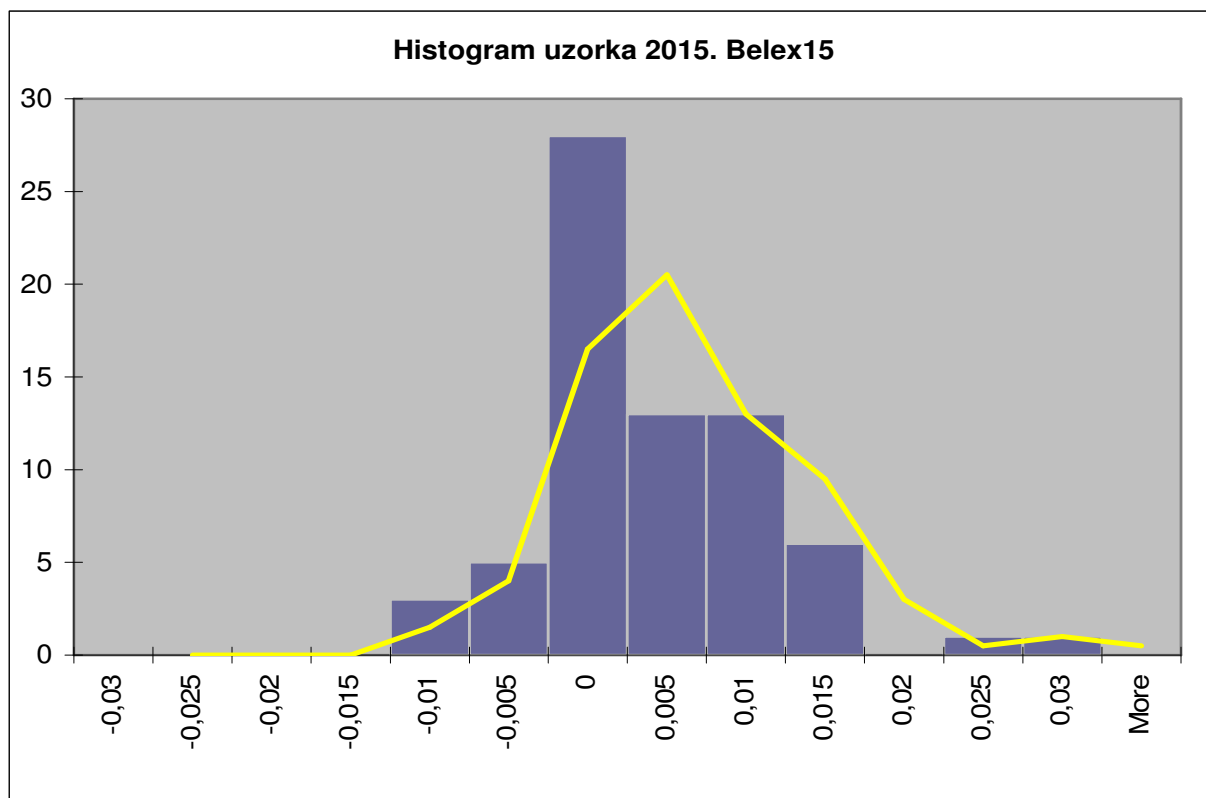
Grafikon 31 na pokazuje Relativan prosečan broj slučajeva u uzorku sa dnevnim odstupanjem manjim od 2% od stvarne vrednosti indeksa Belex 15. Možemo iz grafikona videti da je procenat takvih slučajeva (100%) najveći kada je ponder za Bajesovu ocenu 1, a najmanji (za populaciju i za uzorak) kada je ponder za Laplasovu ocenu 1. Iz Grafikona 29 se vidi takodje da broj slučajeva sa odstupanjem manjim od 2% je konstantniji (sporije opada) kod populacije nego kod uzorka.

4.4 Testiranje predviđanja na namernom uzorku

Pokušali smo zatim i da izvršimo analizu na poslednje dostupnim (svežim) podacima. Time smo želeli da proverimo da li dolazi do određenih promena u predviđanju kao rezultat poslednjih relativnih promena u vrednostima dinara i indeksa Belex 15. Uzete su vrednosti od 06.01.2015. do 20.04.2015. godine (ukupno 70 posmatranja).

<i>Deskriptivna statistika uzorka 2015. Belex 15</i>		
Mean		0,1313%
Standard Error		0,0884%
Median		-0,0030%
Mode	#N/A	
Standard Deviation		0,74%
Sample Variance		0,01%
Kurtosis		2,103183477
Skewness		0,845935113
Range		4,333%
Minimum		-1,491%
Maximum		2,842%
Sum		9,194%
Count		70

Tabela 9

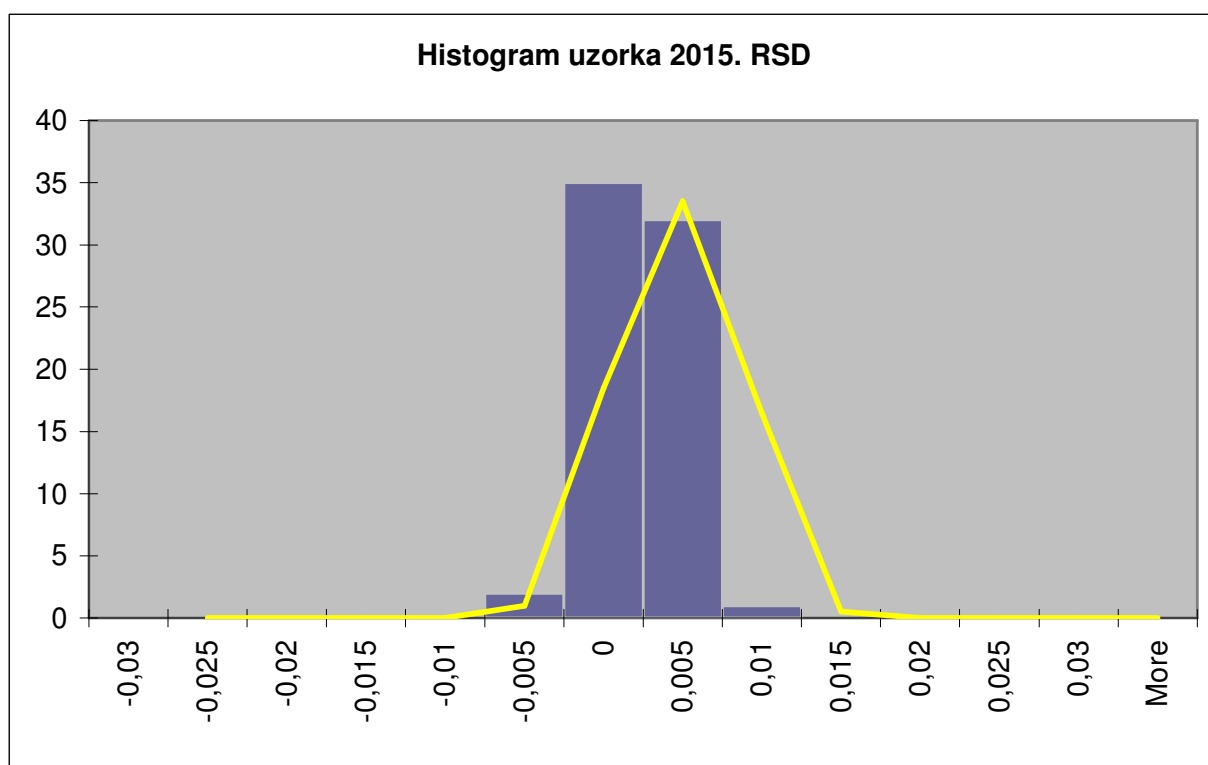


Grafikon 30

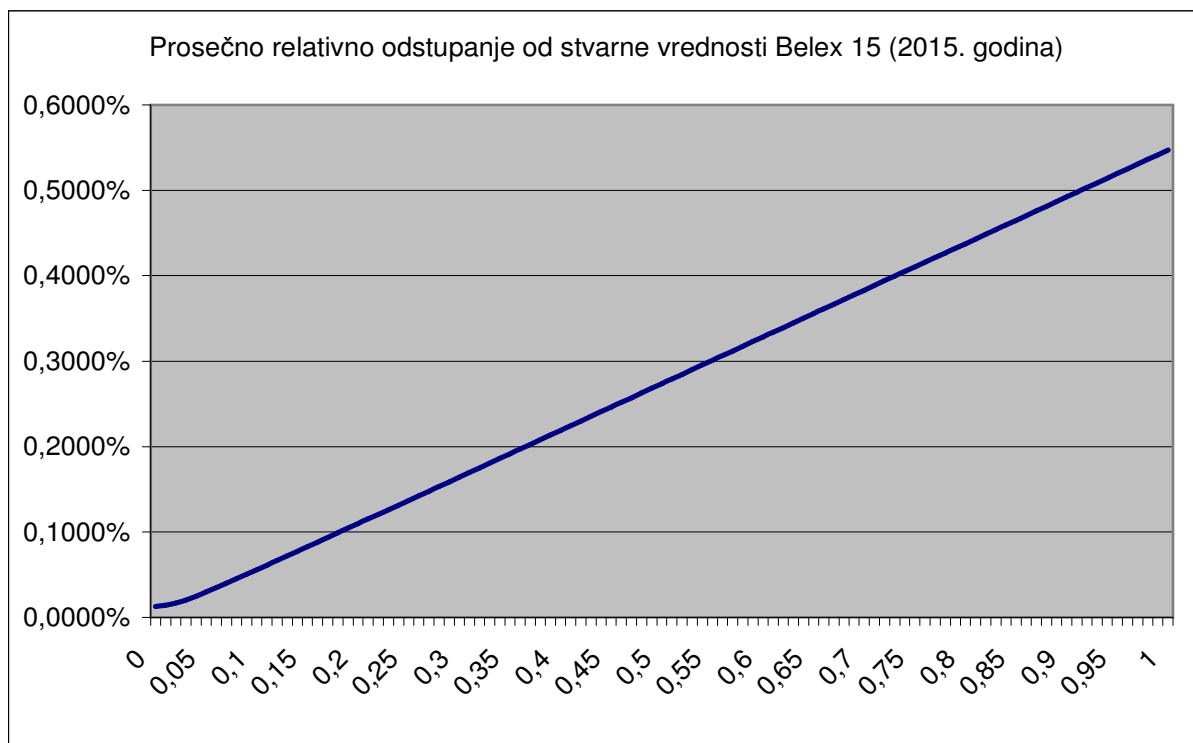
Deskriptivna statistika uzorka 2015. Belex 15

Mean	-0,0104%
Standard Error	0,0298%
Median	-0,0060%
Mode	#N/A
Standard Deviation	0,250%
Sample Variance	0,001%
Kurtosis	1,423610756
Skewness	-0,338940279
Range	1,48803%
Minimum	-0,84053%
Maximum	0,64750%
Sum	-0,007292959
Count	70

Tabela 10

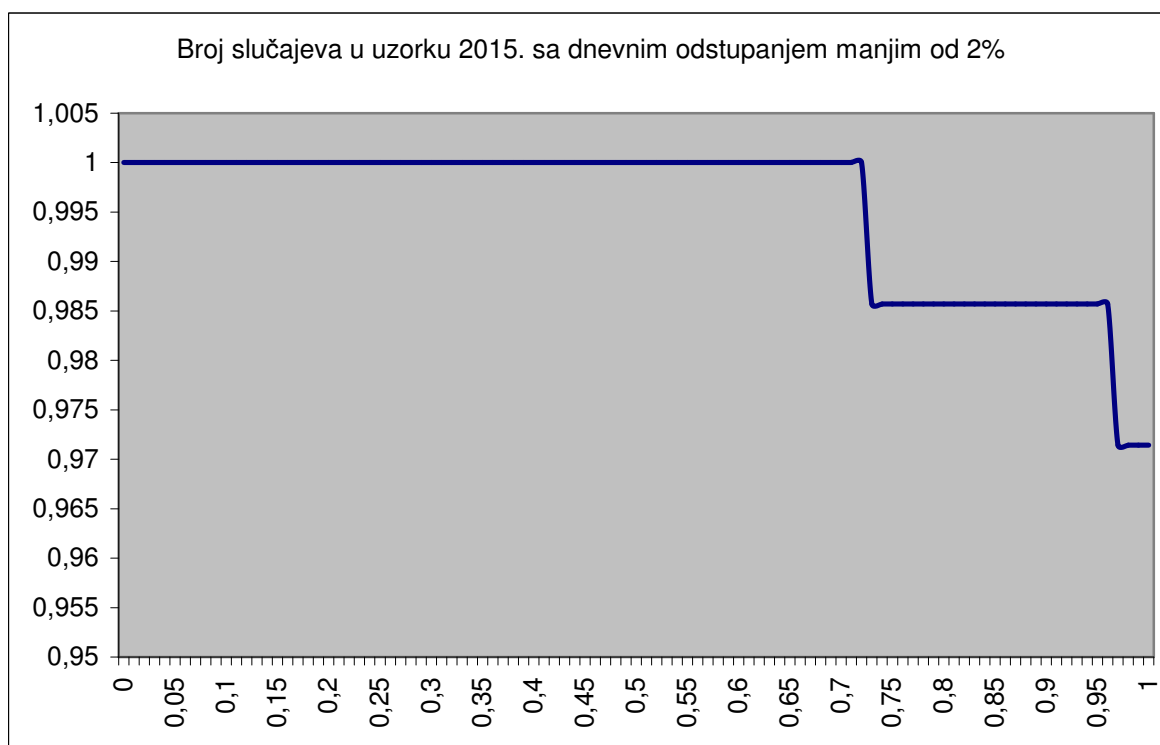


Grafikon 31



Grafikon 32

Iz Grafikona 32 jasno vidimo da tendencije koje smo imali na populaciji, a zatim i na slučajnom uzorku, su se preslikale i na uzorku za 2015. godinu. Najmanje odstupanje nam daje vrednost $\Theta = 0$, i ono tada iznosi svega 0.0128%. Najveće odstupanje je kada ponder jednak 1 i tada odstupanje iznosi 0.547%. Treba napomenuti da su rezultati poboljšani u odnosu na predviđanja vršena na populaciji i na slučajnom uzorku.



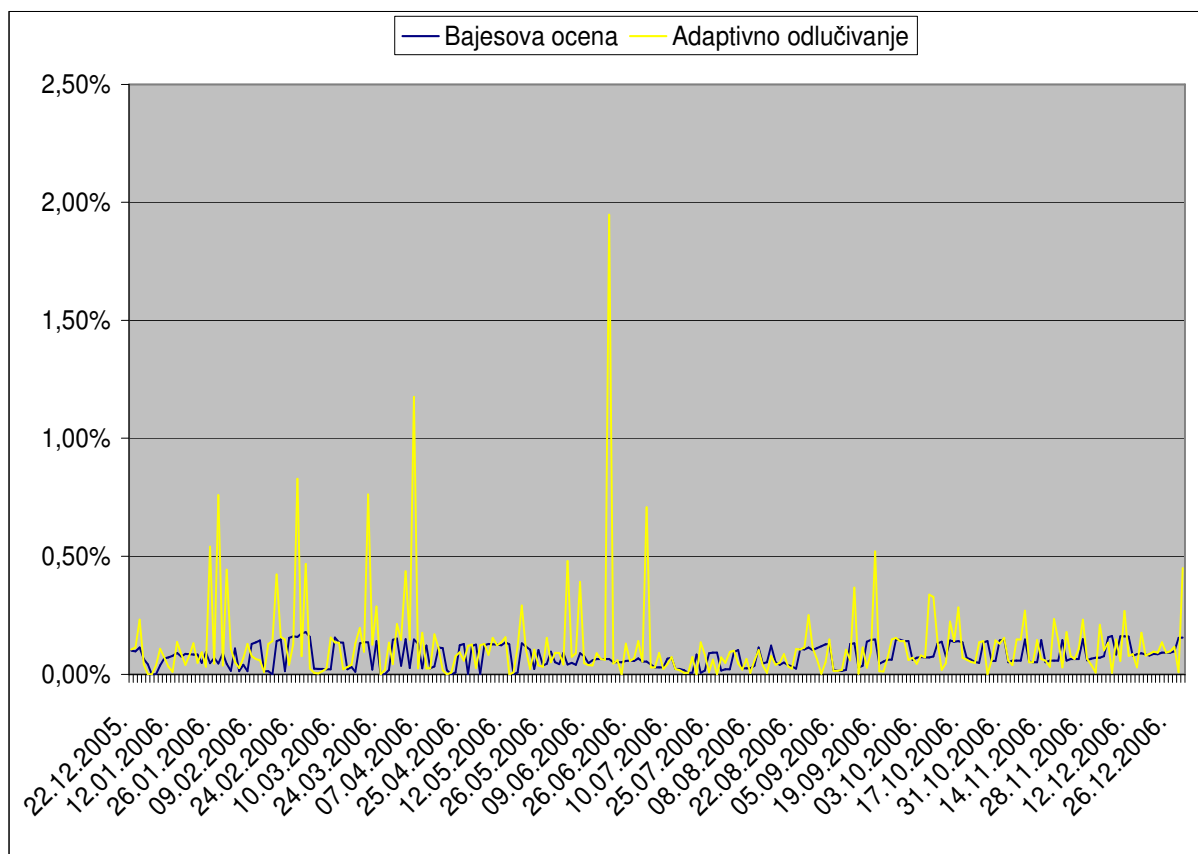
Grafikon 33

Iz Grafikona 33 koji prati odstupanje manje od 2% predviđene od stvarne vrednosti vidimo da u suštini i ovaj grafikon prati ranije vrednosti. Ovde imamo samo robusnije rezultate kao posledicu manjeg uzorka. Vidimo da su vrednosti veće tamo gde je ponder za bajesovu ocenu veći (svih 70 posmatranja ima odstupanje manje od 2 posto kada je vrednost Θ za bajesovu ocenu od 1 do 0,72).

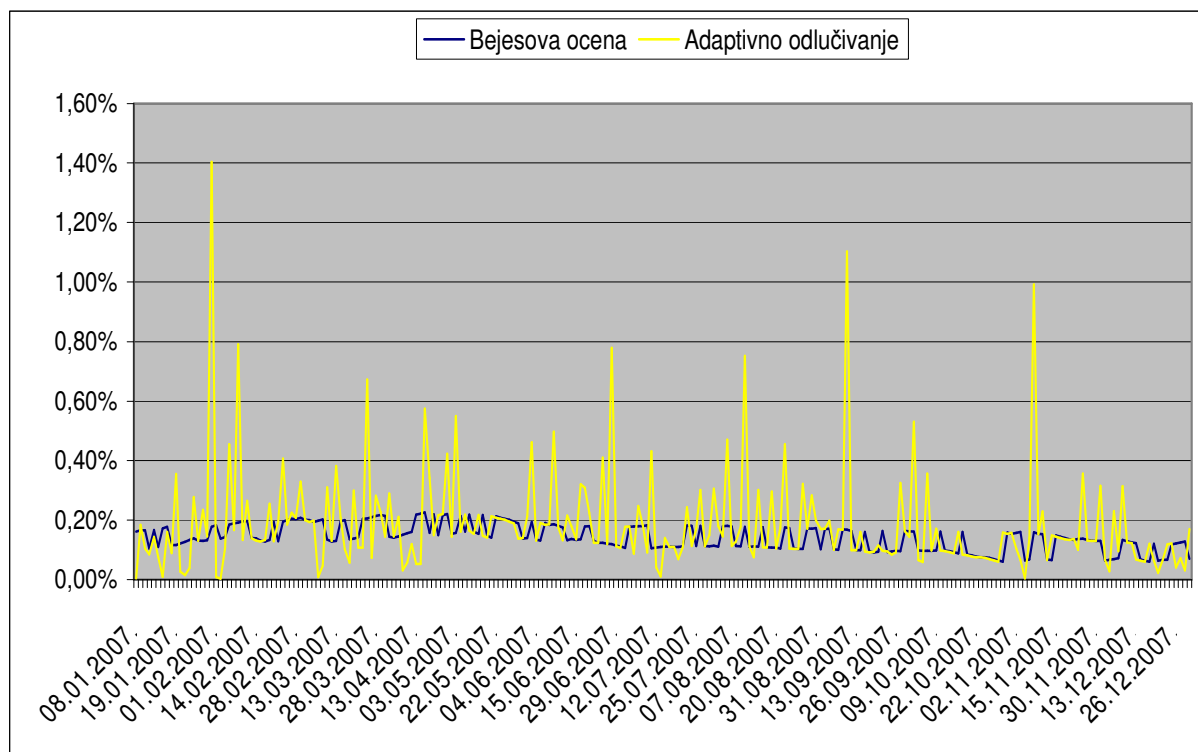
4.5 Predviđanje metodom adaptivnog odlučivanja

Nakon izvršenih prethodnih analiza želeli smo da (kao i pre finije diskretizacije) proučimo da li promenama u toku vremenskog horizonta, možemo popraviti rezultat tj. da li možemo dobiti preciznije predviđanje. Kreirali smo adaptivno predviđanje koje bi u suštini uzimalo vrednost Θ za t , ekvivalentno onoj koja daje najbolje rezultate u $t-1$. Ovim načinom smo dobili da je ukupno prosečno odstupanje od stvarne vrednosti 0,07687%. Od čega je ukupno prosečno odstupanje do 2015. 0,07849%, a za samu 2015. 0,02644%.

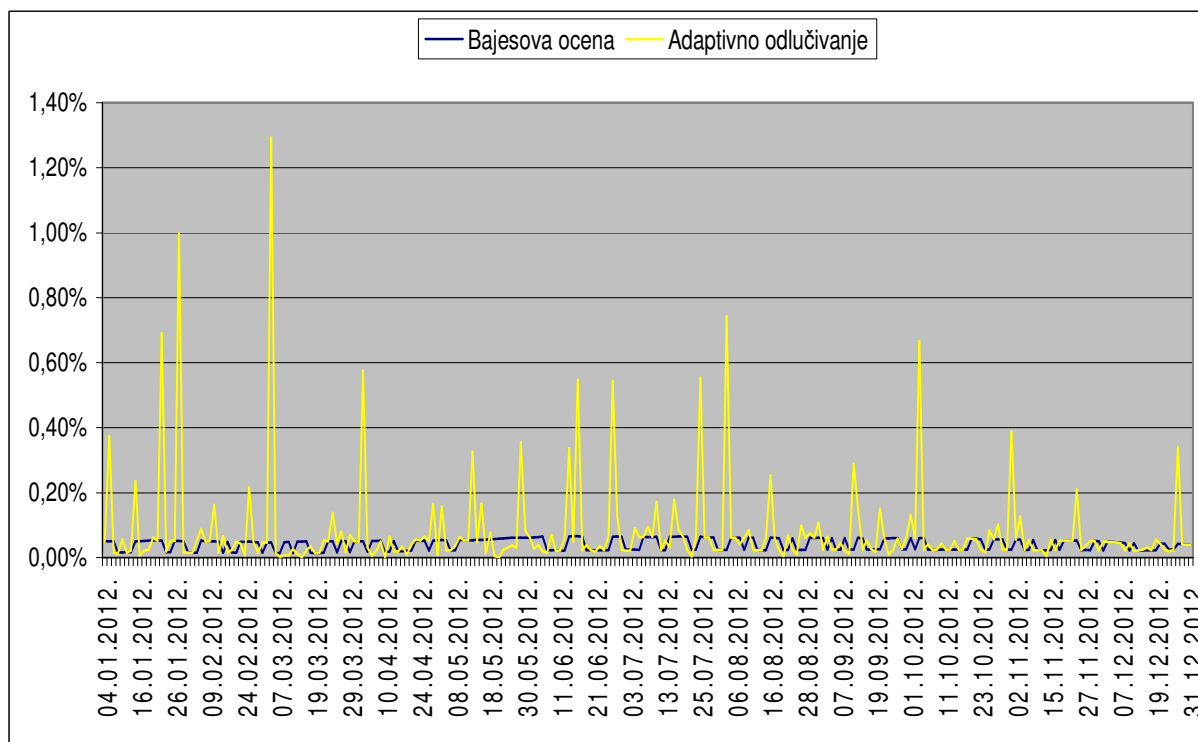
Ovo su u svakom slučaju dobri rezultati, ali ne bolji od predviđanja koja su vršena na osnovu Bajesove ocene.



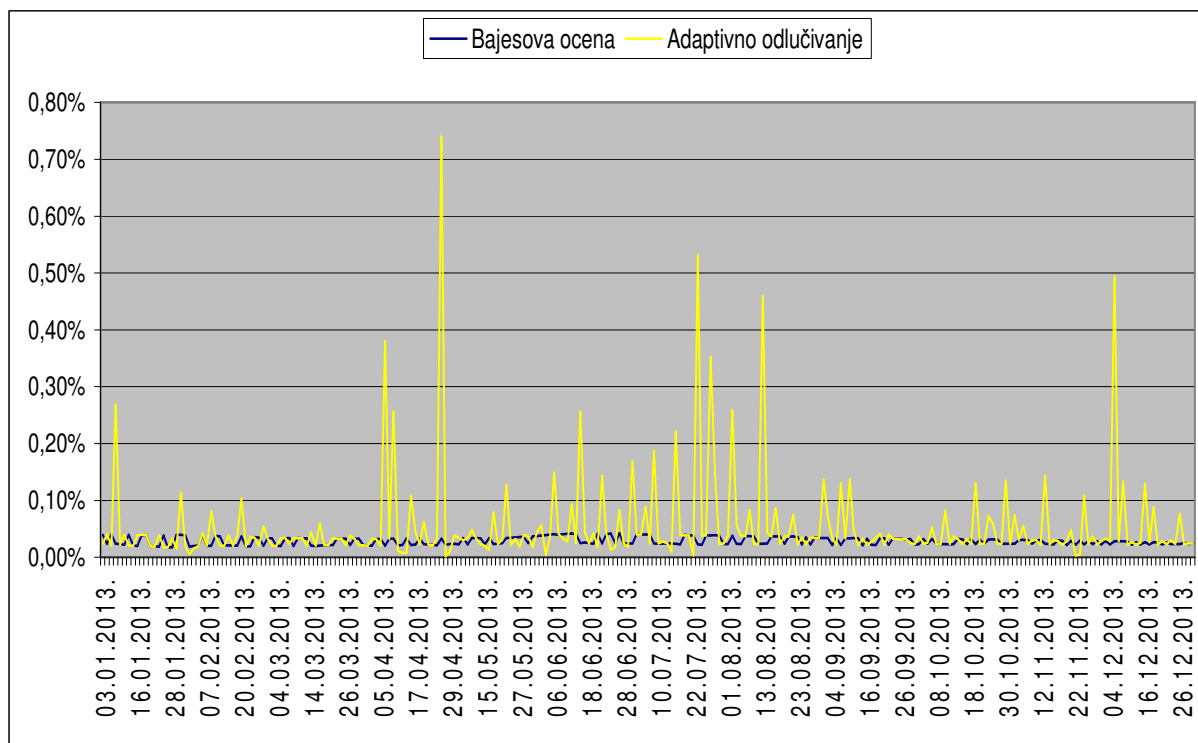
Grafikon 34



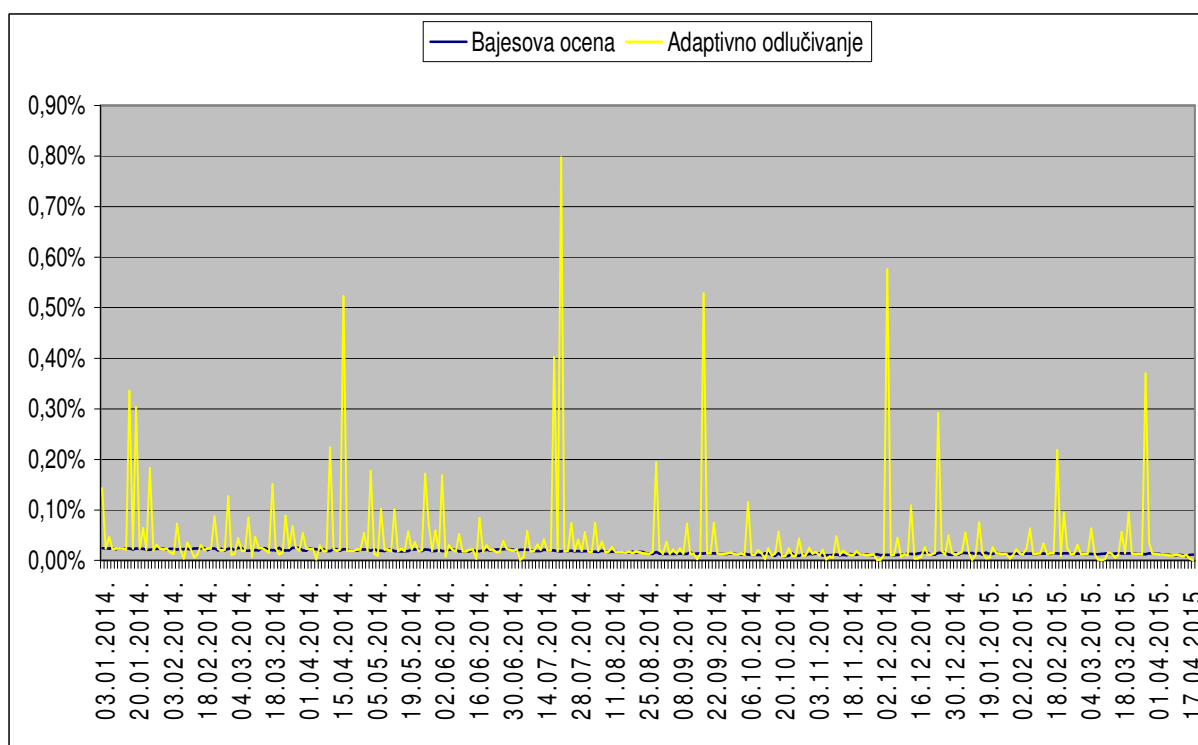
Grafikon 35



Grafikon 36



Grafikon 37



Grafikon 38

U Grafikonima od 34-38 možemo jasno videti koliko je predviđanje na osnovu Bajesove ocene preciznije u odnosu na predviđanje urađeno na osnovu adaptivnog odlučivanja.

Datum	Belex 15	Promena %	Adaptivno odlučivanje
05.04.2006.	1141,13	0,0131%	1,1763%
16.06.2006.	1049,13	0,0467%	1,9473%
31.01.2007.	1976,13	0,1221%	1,4036%
11.09.2007.	2829,86	0,0004%	1,1020%
17.01.2008.	2266,52	0,0914%	1,0382%
04.06.2008.	1758,72	0,0165%	1,7141%
28.05.2010.	644,6	-0,0031%	3,2145%
04.08.2011.	716,15	-0,0907%	1,1207%
05.03.2012.	551,83	-0,0797%	1,2931%

Tabela 11

U Tabeli 11 uzeli smo slučajeve za adaptivno odlučivanje koji odstupaju od realne vrednosti više od 1%. Ono što uočavamo jeste da greška kod predviđanja je najveća onda kada su promene indeksa Belex 15 najmanje.

Predviđanje na osnovu relativne učestalosti (laplasove ocene) je ubedljivo najnepreciznije. Proučavajući razloge za ovakve rezultate odlučili smo da izolujemo slučajeve ekstremnog odstupanja

Slučajevi ekstremnog odstupanja predviđenih vrednosti					
Datum	Belex 15	Belex 15 promena %	Odstupanje bajesove ocene	Odstupanje relativne ocene	Odstupanje adaptivno
30.03.2007.	2849,35	2,54%	0,22%	6,91%	0,23%
24.04.2007.	3015,48	-1,34%	0,15%	5,64%	0,22%
30.04.2007.	3283,62	2,88%	0,15%	6,26%	0,14%
10.05.2007.	2823,39	0,82%	0,16%	15,74%	0,22%
14.05.2007.	3231,18	2,70%	0,22%	12,45%	0,16%
19.11.2007.	2410,21	-1,51%	0,14%	5,19%	0,14%
21.11.2007.	2250	-1,79%	0,14%	7,23%	0,14%
23.01.2008.	2096,44	-2,06%	0,06%	5,47%	0,11%
01.02.2008.	2206,42	2,12%	0,07%	6,00%	0,10%
11.03.2008.	1802,55	-2,77%	0,05%	7,83%	0,11%
14.03.2008.	1615,02	1,62%	0,11%	11,70%	0,11%
24.03.2008.	1799,79	2,35%	0,05%	5,33%	0,06%
14.05.2008.	1858,8	2,72%	0,04%	13,82%	0,09%
17.09.2008.	1177,24	-2,11%	0,00%	9,39%	0,05%
25.09.2008.	1090,19	-2,37%	0,01%	5,78%	0,04%
30.09.2008.	1003,77	-2,22%	0,01%	6,91%	0,01%
09.10.2008.	743,88	1,83%	0,01%	31,17%	0,03%
15.10.2008.	867,82	2,93%	0,01%	16,37%	0,04%
17.10.2008.	815,1	1,93%	0,04%	6,48%	0,03%
28.10.2008.	688,86	-0,75%	0,03%	15,16%	0,03%
21.11.2008.	562,53	-2,20%	0,02%	15,73%	0,02%
16.12.2008.	497,5	-1,00%	0,01%	5,66%	0,02%
26.12.2008.	538,42	2,04%	0,02%	11,27%	0,01%
30.12.2008.	573,38	0,93%	0,01%	6,10%	0,01%
26.01.2009.	546,37	0,84%	0,02%	5,98%	0,00%
25.02.2009.	442,96	-0,32%	0,03%	7,61%	0,02%
20.03.2009.	396,75	-1,99%	0,03%	5,68%	0,04%
11.05.2009.	510,9	-0,32%	0,03%	16,45%	0,03%

14.05.2009.	543,57	2,33%	0,02%	6,01%	0,02%
18.06.2009.	564,08	2,80%	0,03%	5,60%	0,04%
07.10.2009.	836,32	1,30%	0,01%	6,42%	0,02%
18.05.2010.	685,97	-1,85%	0,02%	5,15%	0,03%
11.08.2011.	641,61	-0,46%	0,04%	11,59%	0,01%

Tabela 12

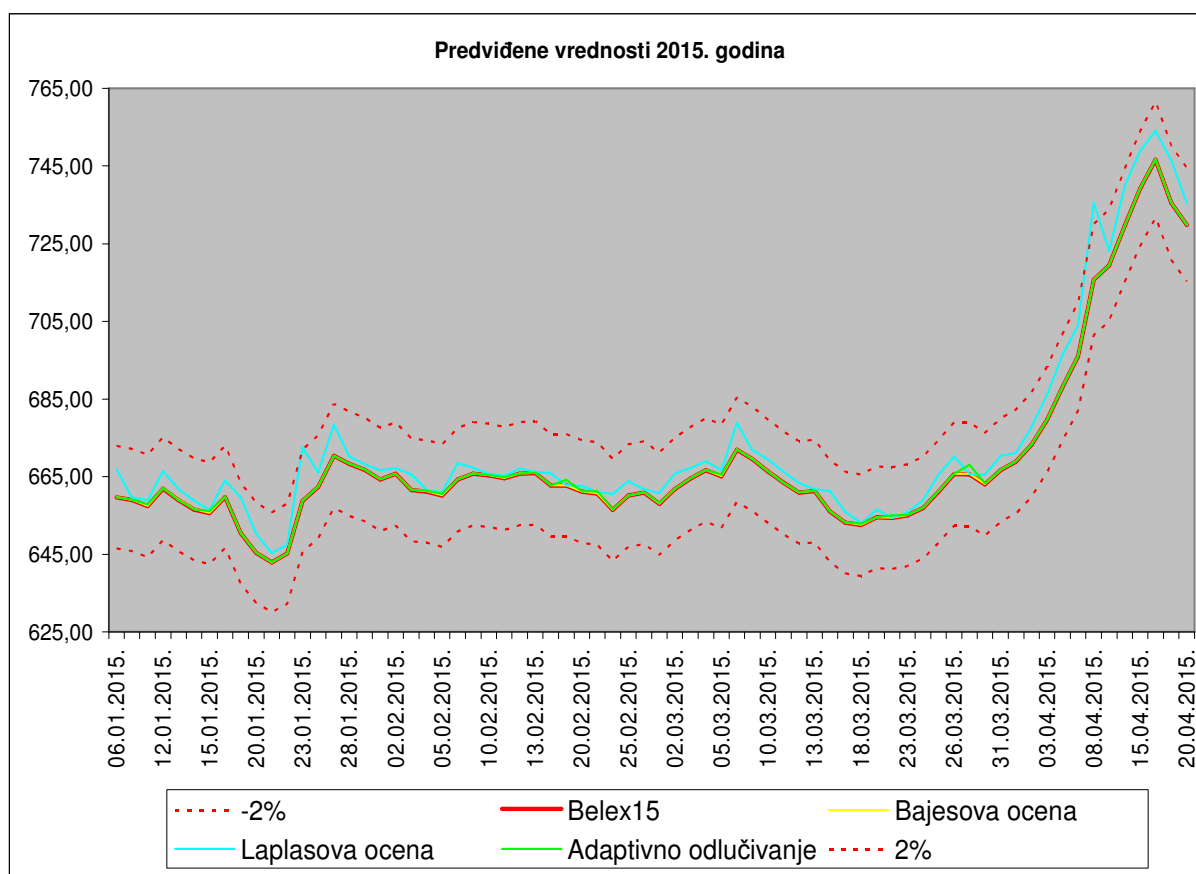
Iz Tabele 12 je jasno uočljivo da predviđanje na osnovu relativne učestalosti je mnogo osetljivije na velike promene vrednosti indeksa Belex 15. Posmatrajući vrednosti za dane 30.04.2007., 14.05.2007., 09.10.2008., 15.10.2008. i dr.

Pokušali smo zatim da na slučajnom uzorku uporedimo ove tri ocene, i dobili smo prosečno odstupanje od stvarne vrednosti indeksa Belex 15 za adaptivno odlučivanje od 0,76 % Bajesovu ocenu, 0,79% i Laplasovu ocenu 0,82%.

Na namernom uzorku za 2015. godinu dobili smo da je prosečno odstupanje za Bajesovu ocenu 0,013%, adaptivno odlučivanje 0,026% i Laplasovu ocenu 0,547%.

Ono što nam je svakako jasno to je da je Laplasova ocena ubedljivo najnepreciznija u svim scenarijima, iz tabele 12 je jasno da je to rezultat osetljivosti na veće promene vrednosti kod indeksa Belex 15. Takođe, jasno je da adaptivno odlučivanje daje bolje rezultate na slučajnom uzorku od Bajesove ocene.

Dalje smo za namerni uzorak za 2015. godinu kreirali grafikon predviđenih vrednosti na osnovu sve tri metode.



Grafikon 39

Iz Grafikona 39 je jasno vidljivo da se predviđanje na osnovu Bajesove ocene i adaptivnog odlučivanja drži okvira odstupanja +/-2%, dok predviđanje na osnovu Laplasove ocene izlazi iz tog okvira.

5. Zaključak

Na početku našeg istraživanja hteli smo da uz pomoć Bajesove teoreme (ocene) pokušamo predvideti kretanje vrednosti indeksa Belex 15 (na osnovu kretanja vrednosti dinara u odnosu na evro). Uzeli smo zvanične serije podataka indeksa Belex 15 i srednje vrednosti kursa RSD/EUR za period 04.10.2005. do 20.04.2015. godine. Eliminirali smo sve ekstremne vrednosti (sve vrednosti sa dnevnim promenama većim od $\pm 3\%$). Izvršili smo raspodelu zavisnih varijabli, kurs RSD u dva scenarija (da u zadatom danu padne ili poraste), a Belex 15 u tri (da padne, ostane nepromenjen i poraste u zadatom danu). U takvim uslovima dobili smo prosečno relativno odstupanje predviđene vrednosti u odnosu na stvarnu Belexa 15 od 0,8374%. Takođe u proseku 92,72% predviđenih vrednosti ima odstupanje manje od 2%.

Rezultate koje smo dobili su bili ohrabrujući, ipak želeli smo proveriti da li ćemo finijom raspodelom zavisnih varijabli dobiti bolje rezultate. Odredili smo novu raspodelu, kurs RSD je ostao u dva scenarija (da u zadatom danu padne ili poraste), a Belex 15 u pet ($\pm 1\%$, ± 0.5 i 0%). Dobili smo prosečno relativno odstupanje predviđene vrednosti u odnosu na stvarnu Belexa 15 od 0.047% za predviđanje na osnovu Bajesove ocene, dok je odstupanje za predviđanje na osnovu relativne učestalosti iznosilo 0,8374%. Zanimljivo je da kako raste učešće relativne ocene skoro potpuno pravolinijski raste i odstupanje od stvarne vrednosti. U proseku 97,53 predviđenih vrednosti ima odstupanje manje od 2%. Finijom raspodelom zavisnih varijabli (tj. indeksa Belex 15) dobili smo mnogostruko bolje rezultate.

Utvdili smo takođe da Laplasova ocena pravi velika odstupanja u predviđanju u odnosu na stvarne vrednosti u uslovima velikih promena istih (Tabela 12), dok adaptivno predviđanje pravi velika odstupanja u slučajevima malih (minimalnih) promena indeksa Belex15 (Tabela 11).

Dobijene rezultate smo zatim proverili na slučajnom uzorku od 467 posmatranja. Rezultati su da u proseku 96,775% predviđenih vrednosti ima odstupanje manje od 2%.

Dobili smo prosečno odstupanje od stvarne vrednosti indeksa Belex 15 za adaptivno odlučivanje od 0,76%, Bajesovu ocenu 0,79% i Laplasovu ocenu 0,82%.

Na namernom uzorku za 2015. godinu dobili smo da je prosečno odstupanje za Bajesovu ocenu 0,013%, adaptivno odlučivanje 0,026% i Laplasovu ocenu 0,547%.

Ono što na kraju možemo zaključiti jeste da najbolje predviđanje se dobija uz pomoć Bajesove ocene. Utvdili smo takođe da adaptivno odlučivanje daje za nijansu bolje predviđene vrednosti na slučajnom uzorku od Bajesove ocene. Predviđanje na osnovu Laplasove ocene u svakom slučaju daje najnepovoljnije rezultate.

Ovo istraživanje bi se svakako moglo proširiti. Moguće je detaljnije ući u analizu još finijom raspodelom za obe promenljive, moguće bi bilo uvesti višefaktorsku analizu. Moguće dodatne varijable koje bi se mogle uvesti su nivo dohotka, štednje, nivo cena na malo, inflacije i dr. Uvođenje svih pomenutih varijabli bi zavisilo od adekvatnih baza podataka i komplementarnosti istih u odnosu na indeks Belex 15. Takođe u daljem istraživanju mogli bi uzetu veće intervale za tetu, primeniti linearnu umesto konveksne kombinacije, odrediti optimalnu dužinu istorije za računanje relativne učestalosti. U svakom slučaju izvedeno istraživanje se može smatrati dobrom polaznom osnovom za dalje primene.

Literatura

- [1] Danijela Rajter Ćirić (2009), "Verovatnoća", Drugo dopunjeno izdanje, Univerzitet u Novom Sadu Prirodno Matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku;
- [2] William M. Bolstad (2007), „Introduction to Bayesian Statistics“ 2nd Edition, John Wiley & Sons;
- [3] John J. Kinney (2014) „Probability: An Introduction with Statistical Applications“, John Wiley & Sons;
- [4] John K. Kruschke (2010), „Doing Bayesian Data Analysis: A Tutorial with R“ 1 edition Academic Press;
- [5] Peter D. Hoff (2009) „A First Course in Bayesian Statistical Methods“, Springer;
- [6] James O. Berger (1993) „Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis“ , Springer Series in Statistics;
- [7] Richard A. DeFusco, Dennis W., McLeavey, Jerald E. Pinto, David E. Runkle (2007) Quantitative Investment Analysis, 2 edition John Wiley & Sons;
- [8] Narodna banka Srbije (2014) "Odluka o uslovima i načinu rada deviznog tržišta", Službeni glasnik RS , бр. 10/2011, 109/2012 и 55/2014;
- [9] Beogradska berza (2014) "Pravila poslovanja Beogradske berze a.d. Beograd", 04/2 br. 1148-1/14, Beogradska Berza ad Beograd;
- [10] Beogradska berza (2012), "Metodologija za izračunavanje indeksa BELEX15" Ver 2.3, Beogradska berza ad Beograd;
- [11] www.belex.rs;
- [12] www.nbs.rs;
- [13] Kristine Beck, Bruce Niendorf, Pamela Peterson (2012), "The use of Bayesian methods in financial research" Investment Management and Financial Innovations, Volume 9, Issue 3;
- [14] Stephen J Turnovsky (1969) "A bayesian approach to the theory of expectations", Journal of Economic Theory, Volume 1, Issue 2, August 1969, Pages 220–227.